

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

obtains information affecting the National Defense of the United States within the meaning of the Espionage Laws, Title 793 and 794, the transmission or revelation of which in any manner to an unauthorized person is prohibited by law.

S-E-C-R-E-T

PROCESSING COPY

25X1

COUNTRY Czechoslovakia

REPORT

SUBJECT Scientific Papers in the Field of
Mathematical Machines and Instruments

DATE DISTR.

4 NOV 1957

NO. PAGES

2

REQUIREMENT
NO.

RD

REFERENCES

DATE OF
INFO.PLACE &
DATE ACQ.ENCLOSURE ATTACHED
PLEASE ROUTE

25X1

25X1

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

scientific papers
in Czech which were submitted for publication in the forthcoming annual
report (#5-1957) (sic) of the Institute of Mathematical Machines and
Instruments of the Czechoslovak Academy of Sciences located in Prague.
The authors, their affiliation, and the titles of the papers (in Czech)
are as follows:

- a. Ing. Jaroslav Marsik VOACH Novaky Jednoduchy vypocet optimalnich parametru
regulacnich obvodu
- b. Ing. Vaclav Pokerka Vysoka skola zeleznici Jednoduchy numericky metoda pro vypocet
odezvy regulacnich obvodu
- c. Ing. Jiri Rippl VUT Praha Ciselný vypocet odezvy nelinearniho a
casove promenneho regulacniho systemu
- d. Ing. Dr. Miroslav VUACH Novaky Impulsni modely
Salaman
- e. Ing. Milan Balda Regula-vyvoj, Elektromechanicky analogon regulacnich
n.p. Praha obvodu eman l (sic)
- f. Ing. Jiri Haskovec Praha, LAT-CSAV Projekt diferencialniho analysatoru
laboratore pro automatisaci a telemech-
aniku CSAV
- g. Ing. Vaclav Cerny and Ustav matematickych Methoda synthesy pakovych mechanismu
Doc. Ing. Dr. Antonin stroju CSAV, Praha na diferencialnim analysatoru
Svoboda
- h. Prof. Dr. Ing. Zdenek Laborator pro auto-matisaci Pouziti harmonickeho
Trnka, and Ing. Zdenek a telemechaniku CSAV analysatoru v regulacni
Kotek CVUT technice

25X1

Page Denied

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

This material contains information affecting the National Defense of the United States within the meaning of the Espionage Laws, Title 18, U.S.C. Secs. 793 and 794, the transmission or revelation of which in any manner to an unauthorized person is prohibited by law.

S-E-C-R-E-T

25X1

COUNTRY Czechoslovakia

REPORT

SUBJECT Scientific Papers in the Field of
Mathematical Machines and Instruments

DATE DISTR.

4 NOV 1957

NO. PAGES

2

REQUIREMENT
NO.

RD

REFERENCES

25X1

DATE OF
INFO.PLACE &
DATE ACQ.

25X1

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

scientific papers
in Czech which were submitted for publication in the forthcoming annual
report (#5-1957) (sic) of the Institute of Mathematical Machines and
Instruments of the Czechoslovak Academy of Sciences located in Prague.
The authors, their affiliation, and the titles of the papers (in Czech)
are as follows:

- a. Ing. Jaroslav Marsik VOACH Novaky Jednoduchny vypocet optimalnich parametru
regulacnich obvodu
- b. Ing. Vaclav Paterka Vysoka skola Jednoduchá numerická metoda pro vypocet
zeleznicni odezev regulacnich obvodu
- c. Ing. Jiri Rippl VUT Praha Ciselny vypocet odezvy nelinearniho a
casove promenneho regulacniho systemu
- d. Ing. Dr. Miroslav VOACH Novaky Impulsní modely
Salamon
- e. Ing. Milan Balda Regula-vyvoj, Elektromechanický analogon regulacnich
n.p. Praha obvodu eman 1 (sic)
- f. Ing. Jiri Haskovec Praha, LAT-CSAV Projekt diferencialniho analysatoru
laboratore pro automatisaci a telemech-
aniku CSAV
- g. Ing. Vaclav Cerny and Ustav matematickych Methoda synthesy pakovych mechanismu
Doc. Ing. Dr. Antonin stroju CSAV, Praha na diferencialnim analysatoru
Svoboda
- h. Prof. Dr. Ing. Zdenek Laborator pro automatisaci Pouziti harmonického
Trnka, and Ing. Zdenek a telemechaniku CSAV analysatoru v regulacni
Kotek CVUT technice

25X1

Page Denied

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

contains information affecting the National Defense of the United States within the meaning of the Espionage Laws, Title 793 and 794, the transmission or revelation of which in any manner to an unauthorized person is prohibited by law.

S-E-C-R-E-T

PROCESSING COPY

COUNTRY Czechoslovakia

REPORT

SUBJECT Scientific Papers in the Field of
Mathematical Machines and Instruments

DATE DISTR.

4 NOV 1957

NO. PAGES

2

25X1

REQUIREMENT
NO.

RD

REFERENCES

25X1

DATE OF
INFO.PLACE &
DATE ACQ.

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

scientific papers 25X1
in Czech which were submitted for publication in the forthcoming annual
report (#5-1957) (sic) of the Institute of Mathematical Machines and
Instruments of the Czechoslovak Academy of Sciences located in Prague.
The authors, their affiliation, and the titles of the papers (in Czech)
are as follows:

- a. Ing. Jaroslav Marsik VJACH Novaky Jednoduchny vypocet optimalnich parametru
regulacnich obvodu
- b. Ing. Vaclav Pokrka Vysoka skola
zeleznicni Jednoducha numericka metoda pro vypocet
odezvy regulacnich obvodu
- c. Ing. Jiri Rippl VUT Praha Ciselný vypocet odezvy nelinearniho a
casove promenneho regulacniho systemu
- d. Ing. Dr. Miroslav VJACH Novaky Impulsni modely
Salamon
- e. Ing. Milan Balda Regula-vyvoj, Elektromechanicky analogon regulacnich
n.p. Praha obvodu eman l (sic)
- f. Ing. Jiri Haskovec Praha, LAT-CSAV Projekt diferencialniho analysatoru
laboratore pro automatisaci a telemech-
aniku CSAV
- g. Ing. Vaclav Cerny and Ustav matematickych Methoda synthesy pakovych mechanismu
Doc. Ing. Dr. Antonin stroju CSAV, Praha na diferencialnim analysatoru
Svoboda
- h. Prof. Dr. Ing. Zdenek Laborator pro automatisaci Pouziti harmonickeho
Trnka, and Ing. Zdenek a telemechaniku CSAV analysatoru v regulacni
Kotek CVUT technice
- i. Ing. Bohumil Mirtes VUT Praha Elektronické metody
analogického vypoctu

S-E-C-R-E-T

25X1

STATE	X	ARMY	X	NAVY	X	AIR	X	FBI	X	AEC	OSL	Ev	X		
-------	---	------	---	------	---	-----	---	-----	---	-----	-----	----	---	--	--

(Note: Washington distribution indicated by "X"; Field distribution by "#".)

25X1

25X1

Page Denied

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

This material contains information affecting the National Defense of the United States within the meaning of the Espionage Laws, Title 18, U.S.C. Secs. 793 and 794, the transmission or revelation of which in any manner to an unauthorized person is prohibited by law.

S-E-C-R-E-T

COUNTRY	Czechoslovakia	REPORT	
SUBJECT	Scientific Papers in the Field of Mathematical Machines and Instruments	DATE DISTR.	4 NOV 1957 25X1
		NO. PAGES	2
		REQUIREMENT NO.	RD
DATE OF INFO.		REFERENCES	25X1
PLACE & DATE ACQ.			

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

scientific papers 25X1

in Czech which were submitted for publication in the forthcoming annual report (#5-1957) (sic) of the Institute of Mathematical Machines and Instruments of the Czechoslovak Academy of Sciences located in Prague. The authors, their affiliation, and the titles of the papers (in Czech) are as follows:

- a. Ing. Jaroslav Marsik VJACH Novaky Jednoduchny vypocet optimalnich parametru regulacnich obvodu
- b. Ing. Vaclav Pukerka Vysoka skola zeleznicni Jednoduchy numericky metoda pro vypocet odezvy regulacnich obvodu
- c. Ing. Jiri Rippl VUT Praha Ciselný vypocet odezvy nelinearniho a casove promenneho regulacniho systemu
- d. Ing. Dr. Miroslav Salamon VJACH Novaky Impulsni modely
- e. Ing. Milan Balda Regula-vyvoj, n.p. Praha Elektromechanicky analogon regulacnich obvodu eman 1 (sic)
- f. Ing. Jiri Haskovec Praha, LAT-CSAV Projekt diferencialniho analysatoru laboratore pro automatisaci a telemech-aniku CSAV
- g. Ing. Vaclav Cerny and Ustav matematickych Methoda synthesy pakovych mechanismu Doc. Ing. Dr. Antonin stroju CSAV, Praha na diferencialnim analysatoru Svoboda
- h. Prof. Dr. Ing. Zdenek Laborator pro automatisaci Pouziti harmonickeho Trnka, and Ing. Zdenek a telemechaniku CSAV analysatoru v regulacni Kotek CVUT technice
- i. Ing. Bohumil Mirtes VUT Praha Elektronicky metody analogickeho vypoctu

S-E-C-R-E-T

25X1

STATE	X	ARMY	X	NAVY	X	AIR	X	FBI		AEC		OSI	Ev	X		
(Note: Washington distribution indicated by "X"; Field distribution by "#".)																

25X1

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

25X1

Page Denied

7. JEDNODUCHÝ VÝPOČET OPTIMÁLNÍCH PARAMETRŮ REGULAČNÍCH OBVODŮ 25X1

Ing. JAROSLAV MARŠÍK
VÚACH Nováky

Tato práce se zabývá jednoduchou methodou výpočtu optimálních hodnot konstant regulačního obvodu z jeho amplitudové frekvenční charakteristiky. Způsob, který je tu uveden, je speciálním případem výpočtu podle SARTORIOVY práce [1].

Hlavním autorovým příspěvkem je odvození vztahů, které umožňují značné zjednodušení výpočtů.

7.1. Úvod

Výpočet optimálních parametrů regulačního obvodu je při návrhu regulací důležitý, avšak obtížný problém, a to hlavně pro matematické nesnáze, které jsou s ním spojeny.

Všeobecně používaným kriteriem optimálnosti regulačního pochodu je kvadratická regulační plocha.

$$F = \int_0^{\infty} e^2(t) dt, \quad (1)$$

která dává v operátorovém tvaru

$$F = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |e(j\omega)|^2 d\omega \quad (2)$$

(kde $e(j\omega)$ je absolutní hodnota Fourierovy transformace regulační odchylky $e(t)$) velmi dobrý názor na kvalitu regulace.

Obecný výpočet integrálu (2) je však možný jen pro soustavy, jejichž přenos je racionální algebraickou funkcí, a je zpravidla velmi pracný.

Často bývá kromě požadavku minimálnosti regulační plochy ještě kladena podmínka malého přeregulování.

Jak bude ukázáno dále, dá se spojení těchto dvou požadavků využít k odvození optima bez výpočtu integrálu (2), a to fyzikálně-matematickou úvahou, při čemž dostaneme obecné výsledky i pro složité soustavy poměrně snadno.

7.2. Odvození optima

Vycházejme ze dvou základních podmínek, v podstatě shodných se zmíněnými požadavky pro optimum:

a) Hodnota regulační odchylky musí být co nejmenší.

b) Ustáleného stavu regulačního pochodu musí být dosaženo co nejdříve, a pokud možno bez kmitů.

Pro operátorové vyjádření odchylky z toho vyplývá:

a) $|e(j\omega)|$ musí mít co nejmenší hodnotu v nejširším rozsahu frekvencí.

b) $|e(j\omega)|$ musí mít monotonní průběh v závislosti na frekvenci — bez resonančních vrcholů (poměr imaginární složky k reálné každého komplexního kořenu charakteristické rovnice funkce $e(j\omega)$ nesmí být příliš velký), aby bylo dostatečné tlumení kmitů.

Na základě těchto požadavků můžeme provést obecný rozbor regulačního obvodu, který se skládá z regulované soustavy s frekvenční charakteristikou S a regulátoru s charakteristikou R ($R = R(j\omega)$, $S = S(j\omega)$).

V některém místě soustavy předpokládáme vznik poruchy, která působí změnu regulované veličiny. Tato změna bude závislá na tvaru poruchy, místě, kde vznikla, a na charakteru soustavy a regulátoru. Regulátor má za úkol tuto změnu co nejvíce a co nejrychleji zmenšit, ať byla způsobena jakkoliv. Jeho funkci nejlépe zhodnotíme, porovnáme-li poměry před jeho zapojením a po něm.

Před zavedením regulace byla odchylka od žádané hodnoty e_1 .

Po připojení regulátoru se zmenší na hodnotu

$$e_2 = e_1 \frac{1}{1 + SR}$$

Aby byla regulace optimální, musí výraz $\frac{1}{1 + SR}$ vyhovovat těmto podmínkám:

a) Musí mít co nejmenší hodnotu v nejširším frekvenčním rozsahu,

b) musí mít monotonní průběh závislosti na frekvenci.

Výraz $\frac{1}{1 + SR}$ si můžeme vyjádřit účelněji ve tvaru

$$\frac{1}{1 + SR}$$

Jeho minimum bude nejlépe splněno při

$$F = \frac{SR}{1 + SR} \rightarrow 1. \quad (5)$$

Pro soustavy, jejichž frekvenční charakteristika v závislosti na frekvenci klesá, nebo alespoň nestoupá, bude požadavek (5) nejlépe splněn při frekvenci nulové (za předpokladu monotonnosti).

Musíme se tedy snažit, aby byla hodnota funkce $F = \frac{SR}{1 + SR}$ rovna hodnotě pro frekvenci $\omega \rightarrow 0$, pokud možno v širokém rozsahu.

$$F \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} F(0), \quad (6)$$

$$\frac{SR}{1 + SR} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{SR}{1 + SR} \right)_{(\omega=0)} \quad (7)$$

Vyhovuje-li funkce F Bodeho podmínce vzájemné závislosti amplitudové a fázové charakteristiky, můžeme napsat podobný přibližný vztah i pro absolutní hodnotu $|F|$:

$$\left| \frac{SR}{1 + SR} \right| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \left(\left| \frac{SR}{1 + SR} \right| \right)_{(\omega=0)} \quad (8)$$

a tedy i pro dvojmo absolutní hodnoty, které výhodně použijeme v dalším:

$$\left| \frac{SR}{1 + SR} \right|^2 \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \left(\left| \frac{SR}{1 + SR} \right|^2 \right)_{(\omega=0)} \quad (9)$$

To platí jen přibližně a za uvedených předpokladů. Je-li totiž funkce F prakticky konstanta (je frekvenčně nezávislá v širokém rozsahu), je i posun fáze zanedbatelný, a vektor F můžeme počítat s hodnotou $F(0)$ algebraicky.

Tento postup má praktické odůvodnění, protože odstraní mnohé nevhodné přepočty. Zjednodušení, které jsme tím získali, není však na úkor dobrého výsledku.

Jak si ukážeme na praktickém příkladě, může se této metody použít i v případě, že uvedená Bodeho podmínka není splněna (na př. u soustavy s dopravním zpožděním).

Ze vztahu (8) vyplývá, že absolutní hodnota frekvenční charakteristiky $|F|$ má být pokud možno co nejméně závislá na frekvenci. To platí i o její dvojmo $|F|^2$. Aby funkce $|F|^2$ měla tuto požadovanou vlastnost, musí mít co nejvíce nulových derivací v počátku (pro $\omega \rightarrow 0$), o čemž se přesvědčíme MacLaurinovým rozvojem v tomto bodě (ovšem jen za předpokladu, že funkce nemá v tomto bodě pól).

Absolutní hodnotu $|F|$ dostaneme násobením funkce F funkcí komplexně sdruženou \bar{F} odmocněním:

$$|F| = \sqrt{F \cdot \bar{F}}$$

kde

$$F = F(j\omega), \quad \bar{F} = F(-j\omega).$$

Protože platí pro $|F|^2$ obdobný vztah jako pro $|F|$ použijeme přímo dvojmo, aby odpadly obtížné operace s odmocninou.

Dosadíme-li výsledky z MacLaurinova rozvoje

$$|F|^2 = |F(0)|^2 + |F'(0)|^2 \omega + \frac{1}{2!} |F''(0)|^2 \omega^2 + \dots$$

do vzorce (9), dostaneme, že

$$\left| F(0) \right|^2 \omega + \frac{1}{2!} |F''(0)|^2 \omega^2 + \frac{1}{3!} |F'''(0)|^2 \omega^3 + \dots \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0. \quad (10)$$

Protože $|F|^2$ je sudá funkce, jsou všechny liché derivace identicky nulové a výraz (10) přejde na

$$\frac{1}{2!} |F''(0)|^2 \omega^2 + \frac{1}{4!} |F^{(4)}(0)|^2 \omega^4 + \dots \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0. \quad (11)$$

Abychom se přiblížili tomuto požadavku, musí mít co nejvíce derivací nulovou hodnotu, jak již bylo řečeno.

Protože tyto derivace jsou funkcí konstant obvodu, obsahují též n hledaných parametrů regulátoru. Ty pak musí mít takovou hodnotu, aby platila podmínka nulové velikosti prvních n sudých derivací. Problém se tím převede na řešení algebraických rovnic.

To znamená, že musíme funkci F , která má tvar zlomku, násobit funkcí k ní komplexně sdruženou \bar{F} , abychom vypočítali dvojmo její absolutní hodnoty, a tu potom $2n$ -krát derivovat.

To je však zdlouhavá práce, proto si ukážeme, jak se dá výpočet zjednodušit na základě některých vlastností metody i vyšetřované funkce.

7.3. Zjednodušení výpočtu

Máme-li již k dispozici dvojmo absolutní hodnoty funkce F ve tvaru

$$|F|^2 = \frac{|A|^2}{|B|^2}, \quad (12)$$

nemusíme ji za daných okolností derivovat jako zlomek, ale postačí, když zderivujeme čitatele a jmenovatele zvlášť a místo podmínky

$$\{ |F|^2 \}_{(\omega=0)}^{(k)} = 0 \quad (k = 2, 4, 6, \dots, 2n) \quad (13)$$

zavedeme podmínku

$$\left[\frac{\{ |A|^2 \}_{(\omega=0)}^{(k)}}{\{ |B|^2 \}_{(\omega=0)}^{(k)}} - |F|^2 \right]_{(\omega=0)} \quad (k = 2, 4, 6, \dots, 2n). \quad (14)$$

Důkaz. Stanovíme-li podmínku (13) pro k -tou derivaci a dosadíme-li do ní výsledky z téže podmínky pro všechny předešlé derivace, přejde vztah (13) na ekvivalentní výraz (14):

$$\left[\{ |F|^2 \}_{(\omega=0)}^{(1)} = \frac{\{ |A|^2 \}_{(\omega=0)}^{(1)} |B|^2 - |A|^2 \{ |B|^2 \}_{(\omega=0)}^{(1)}}{|B|^4} \right]_{\omega=0} \equiv 0.$$

Z toho:

$$\left[\frac{\{ |A|^2 \}_{(\omega=0)}^{(1)}}{\{ |B|^2 \}_{(\omega=0)}^{(1)}} = \frac{|A|^2}{|B|^2} \right]_{(\omega=0)}. \quad (15)$$

Napišme-li podmínku pro další derivaci a dosadíme-li výsledek ze vzorce (15), dostaneme:

$$\frac{\{ |A|^2 \}_{(\omega=0)}^{(2)}}{\{ |B|^2 \}_{(\omega=0)}^{(2)}} - \frac{|A|^2}{|B|^2}.$$

Pokračujeme-li takto postupně dále, dostaneme obecně vztah (14).

Tento výraz se dá ještě zjednodušit tím, že vhodným způsobem obědeme výpočet dvojmoji absolutních hodnot a vyjádříme si přímo jejich derivace.

Protok

$$|A|^2 = A \bar{A} = A(j\omega) A(-j\omega)$$

(podobně pro $|B|^2$), bude m -tá derivace

$$\{ |A|^2 \}_{(\omega=0)}^{(m)} = \{ A \bar{A} \}_{(\omega=0)}^{(m)} \quad (17)$$

Použitím Leibnitzova vzorce pro derivaci součinu dostaneme:

$$\{ |A|^2 \}_{(\omega=0)}^{(m)} = \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^{(m-k)} \bar{A}^{(k)} \right]_{(\omega=0)} \quad (18)$$

Abychom však nemuseli zbytečně počítat ani derivace komplexně sdružených funkcí \bar{A} a \bar{B} , vyjádříme si je pomocí daných funkcí A a B .

K tomu můžeme použít opět Maclaurinovy řady:

$$A = A_{(0)} + A'_{(0)} j\omega + A''_{(0)} \frac{(j\omega)^2}{2!} + \dots + A^{(m)}_{(0)} \frac{(j\omega)^m}{m!}, \quad (19)$$

$$\bar{A} = \bar{A}_{(0)} + \bar{A}'_{(0)} (-j\omega) + \bar{A}''_{(0)} \frac{(-j\omega)^2}{2!} + \dots + \bar{A}^{(m)}_{(0)} \frac{(-j\omega)^m}{m!}. \quad (20)$$

Porovnáním výrazů (19) a (20) zjistíme, že obecně

$$\bar{A}^{(m)}_{(0)} = (-1)^m A^{(m)}_{(0)}, \quad (21)$$

tedy sudé derivace se rovnají, liché mají jen opačné znaménko.

Tentýž výsledek potvrzuje i základní definice Fourierovy transformace:

$$A = \int_0^\infty A(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (22)$$

$$\bar{A} = \int_0^\infty A(t) e^{j\omega t} dt. \quad (23)$$

Derivujeme-li (22) a (23) pak pro $\omega = 0$ najdeme stejný vztah jako (21).

Po dosazení (21) do (18) dostaneme:

$$\{ |A|^2 \}_{(\omega=0)}^{(m)} = \left[\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} A^{(m-k)} A^{(k)} \right]_{(\omega=0)}. \quad (24)$$

Podmínka optima (14) proto bude mít tento konečný tvar:

$$\left[\frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} A^{(m-k)} A^{(k)}}{\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} B^{(m-k)} B^{(k)}} - \frac{|A|^2}{|B|^2} \right]_{(\omega=0)} \quad (25)$$

($m = 2, 4, 6, \dots, 2n$), (n = počet volitelných konstant).

Máme-li tedy n volitelných konstant regulačního obvodu, postačí k výpočtu jejich optimálních hodnot znalost frekvenční charakteristiky a vzorce (25).

Uvedené metody můžeme použít i u lineárních impulsových regulací, u servomechanismů a zesilovačů se zpětnou vazbou, a to i tehdy, je-li frekvenční charakteristika dána experimentálně, a dá-li se nahradit analytickým výrazem.

Některé příklady přispějí k vysvětlení této metody.

Příklad 1. Máme regulovanou soustavu n -tého řádu $S = \frac{1}{(p\tau + 1)^n}$ (všechny časové konstanty stejné, pro regulaci nejnepříznivější případ) a regulátor proporcionálně integrační

$$R = P + \frac{1}{pI} \cdot \frac{pPI + 1}{pI}$$

(kde P je proporcionální zesílení a I je integrační časová konstanta). Přenos regulačního obvodu podle vzorce (5) bude:

$$F(p) = \frac{pPI + 1}{pI(p\tau + 1) + pPI + 1}$$

Hledáme optimální hodnoty P a I .

K tomu potřebujeme dvě podmínky podle vzorce (25) (jednu pro $m = 2$ a druhou pro $m = 4$), tedy první čtyři derivace čitatele a jmenovatele funkce $F(p)$ pro $p = 0$.

Derivace čitatele:

(pro $p = 0$)

nulová: 1	nulová: 1
první: PI	první: $I(1 + P)$
druhá: 0	druhá: $2\pi I$
třetí: 0	třetí: $3(\frac{2}{3})^2 I^2$
čtvrtá: 0	čtvrtá: $4(\frac{2}{3})^3 I^3$

Derivace jmenovatele:

Podmínky optima jsou (v. vz. (25)):

a) pro $m = 2$:

$$\frac{-2P^2I}{4\pi I - 2\pi^2(1 + P)^2} = 1;$$

b) pro $m = 4$:

$$\frac{0}{8(\frac{2}{3})^3 6\pi^2 I - 24(\frac{2}{3})^2 2\pi^2 I^2(1 + P) + 6 \cdot 4\pi^2 I^3 \tau^2} = 1.$$

Po úpravě:

a)

$$I = \frac{2n\tau}{1 + 2P}$$

b)

$$\frac{(n-1)(n-2)\tau}{3[P(n-1)-1]}$$

Řešením těchto dvou rovnic dostaneme:

$$P = \frac{n+2}{4(n-1)}, \quad I = \frac{1}{3}(n-1)\tau.$$

Abychom se přesvědčili, zda tyto výsledky jsou použitelné i pro n značně větší než je počet volitelných podmínek, provedeme si kontrolu stability:

Je-li $n \geq 2$, bude $P > 1$.

Dosadíme-li tyto hodnoty do přenosu rozpojeného regulačního obvodu

$$RS = \frac{pPI + 1}{pI(p\tau + 1)^n},$$

bude jeho absolutní velikost

$$|RS| \rightarrow \left| \frac{1}{4(p\tau + 1)^n} \right| < 1.$$

Protože tato hodnota je značně menší než jednička, je soustava stabilní (i přesto, že stejná velikost všech časových konstant činí soustavu nejméně způsobilou ke kvalitní regulaci). Můžeme se tedy domnívat, že správný výsledek dostaneme i v jiných případech, což potvrzuje i další příklad.

Příklad 2. Máme regulovat soustavu nultého řádu s dopravním zpožděním proporcionálním regulátorem. Víme, že je to prakticky nemožné, protože regulační pochod je vždy kmitavý, a nestabilita nastává již při jednotkovém zesílení.

Přenos regulační soustavy podle vzorce (5) je:

$$F(p) = \frac{P e^{-pT_d}}{1 + P e^{-pT_d}}$$

Podmínka optima je:

$$\frac{0}{2T_d^2(1 + P) - 2T_d^2} = \frac{1}{(1 + P)^2} \cdot \frac{P^2}{1}$$

Tedy:

$$2T_d^2(1 + P) - 2T_d^2 = 0$$

a z toho:

$$P = 0,$$

což vyplývá i z logické úvahy.

Příklad 3. Soustava prvního řádu s dopravním zpožděním

$$S = \frac{e^{-pT_d}}{p\tau + 1}$$

a proporcionálně integrační regulátor

$$R = \frac{pPI + 1}{pI}$$

Přenos podle (5):

$$F(p) = \frac{pPI + 1}{pI(p\tau + 1)e^{pT_d} + pPI + 1}$$

Podmínky optima:

a)

$$\frac{-2P^2I\tau}{4I(T_d + \tau) - 2I^2(1 + P)^2} = 1,$$

b)

$$\frac{0}{8I^2T_d^2(T_d + 3\tau) - 24I^2T_d(T_d + 2\tau)(1 + P) + 24I^3(T_d + \tau)^2} = 1.$$

Další úpravou a po zavedení poměrných veličin, vztažených k časové konstantě τ , obdržíme:

$$a) \quad i(1 + 2P) - 2(d + 1) \stackrel{!}{=} 0,$$

$$b) \quad d^2(d + 3) - 3id(d + 2)(1 + P) + 3i(d + 1)^2 \stackrel{!}{=} 0,$$

kde $d = \frac{T\tau}{\tau}$ je poměrné dopravní zpoždění, $i = \frac{I}{\tau}$.

Výsledky řešení těchto rovnic jsou na obr. 1.

Příklad 4. Soustava stejná jako v předchozím příkladě, regulátor PID s přenosem

$$R = \frac{p^2 DI + pPI + 1}{pI},$$

kde D je derivační časová konstanta.

Přenos podle vzorce (5):

$$F = \frac{p^2 DI + pPI + 1}{e^{p\tau d} pI(p\tau + 1) + p^2 DI + pPI + 1}.$$

Výsledky, získané obdobně jako v předchozích příkladech, ukazuje obr. 2.

Porovnáním obr. 1 a 2 zjistíme, že přidání derivační složky poněkud zlepšilo regulaci, protože umožňuje celkově větší zesílení regulátoru (větší P a menší I).

Je nutno upozornit, že soustava s dopravním zpožděním nespĺňuje zmíněnou Bodeho podmínku jednoznačné závislosti fáze a absolutní hodnoty frekvenční charakteristiky, proto se může stát, že pro větší hodnoty vypočítané derivační konstanty bude regulace nestabilní u vyšších frekvencí. U běžných soustav bez dopravního zpoždění stačí zabránit mocným oscilacím u nejnižších frekvencí, aby bylo zaručeno, že kmity nenastanou ani u vyšších. (Zesílení pro vyšší kmitočty klesá.) Oblast hodnoty $\delta = \frac{D}{\tau}$, zakreslená v obr. 2

však dává stabilní regulační pochod.

Na servomechanismus můžeme aplikovat výpočet beze změn, protože přenosová funkce

$$F = \frac{RS}{1 + RS}$$

je obdobná přenosu servomechanismů.

Máme-li servomechanismus s přenosem n -tého stupně a $n - 1$ volitelnými konstantami, obdržíme výsledky, které jsou u servomechanismů prvního typu úplně shodné s Whiteleyho standardními tvary (viz práce [2] v seznamu literatury).

7.4. Závěr

Z uvedených příkladů (a zvláště z prvního) je zřejmé, že výsledky, které jsme získali, odpovídají dosti přísným požadavkům kvality přechodných průběhů, neboť je dovoleno poměrně malé zesílení, které je značně menší než kritické. To potvrdily i jiné příklady, které tu nejsou uvedeny. Protože výsledky jsou úplně obecné a jejich získání je velmi snadné, znamená tento způsob výpočtu značné ulehčení práce při návrhu regulací.

7.5. Dodatek

Podnět k této práci byl dán článkem [1], kde je optimum odvozeno jiným způsobem. Jeho autor, H. Sartorius, vychází z podmínky monotonnosti frekvenčního spektra regulační odchylky, v němž uvažuje i tvar i místo poruchy. Za předpokladu, že je tato podmínka splněna, se domnívá, že může použít jako kriteria kvality regulace lineární regulační plochy, protože regulační pochod není kmitavý. (Není to sice vždy pravda, ale tlumení je dobré, takže lze tuto okolnost připustit.)

Je vyšetřováno frekvenční spektrum (dvojmoc absolutní hodnoty Fourierovy transformace) regulační odchylky, které se obecně může napsat ve tvaru:

$$J(\omega^2) = \frac{Z(\omega^2)}{N(\omega^2)} = \frac{B_n \omega^{2n} + B_{n-1} \omega^{2(n-1)} + \dots + B_0}{A_m \omega^{2m} + A_{m-1} \omega^{2(m-1)} + \dots + A_0}.$$

Podmínkou monotonnosti této funkce je, aby

$$\frac{B_0}{A_0} \geq \frac{B_\mu}{A_\mu} \quad \text{tedy} \quad J_{(0)} \geq \frac{B_\mu}{A_\mu}$$

kde B_μ a A_μ jsou koeficienty u stejné mocniny frekvence ω . $J_{(0)}$ je dvojmoc lineární regulační plochy.

Dále je užito vztahu mezi funkcí J a jejími sudými derivacemi v bodě $\omega = 0$:

$$\begin{aligned} Z_{(0)} &= J_{(0)} N_{(0)}, \\ Z'_{(0)} &= J'_{(0)} N_{(0)} + 2J_{(0)} N'_{(0)} + J_{(0)} N''_{(0)}, \\ J_{(0)} &= \frac{Z''_{(0)}}{N''_{(0)}} - \frac{N_{(0)}}{N''_{(0)}} J''_{(0)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Protože

$$\frac{Z''_{(0)}}{N''_{(0)}} = \frac{B_2}{A_2},$$

bude

$$J_0 = \frac{B_2}{A_2} - \frac{A_0}{A_2} J''_{(0)} \quad (29)$$

Dosažením (29) do (27) obdržíme:

$$\frac{B_2}{A_1} - \frac{A_2}{A_2} J_{(0)}'' \geq \frac{A_2}{B_2} \quad (30)$$

Tento vztah je splněn jen pro

$$J_{(0)}'' \leq 0,$$

$J_{(0)}$ bude mít minimum pro $J_{(0)}' = 0$, jak je vidět z výrazu (30). Pro $J_{(0)}' < 0$, $J_{(0)}$ roste, pro $J_{(0)}' > 0$ není možné vyhovět požadavkům (27) a (30).

První podmínkou optima bude tedy

$$J_{(0)}'' = 0 \quad \text{nebo} \quad \frac{B_2}{A_1} = \frac{B_0}{A_0}.$$

Podobným způsobem lze odvodit ze vztahů $J_{(0)}$ s jejími vyššími derivacemi:

$$J_{(0)}^{(\mu)} = 0 \quad \text{nebo} \quad \frac{B_\mu}{A_\mu} = \frac{B_0}{A_0} \quad (\mu = 1, 2, 3, \dots, m).$$

Jak vidíme, je to stejná podmínka, jaká byla odvozena v této práci, jenže obecnější, protože počítá nejen s vlastnostmi regulačního obvodu, ale i s poruchami.

Podle charakteru poruchy se řídí nastavení parametrů regulátoru.

Na př. při poruchách s povlnným náběhem není nebezpečí velkého přeregulování, i když sám regulační obvod má sklony ke kmitání, protože složky spektra poruchy, jejichž frekvence se blíží rezonanční frekvenci obvodu, jsou malé. V tomto případě si můžeme dovolit větší zesílení a tím dosáhnout zmenšení regulační plochy.

Podmínka pro minimum frekvenčního spektra v bodě $\omega = 0$ není pouze podmínkou pro minimum lineární regulační plochy ($J_{(0)}$ je dvojnásob této plochy), neboť platí přibližně i pro minimum kvadratické plochy, vázané ovšem tím, že frekvenční spektrum nesmí mít vrchol převyšující hodnotu v jeho počátku.

Zvyšujeme-li totiž zesílení, klesá sice $J_{(0)}$, a tím i regulační plocha (i kvadratická), ale zmenšuje se též tlumení, a může se objevit rezonanční vrchol. Pro dosažení minima plochy by bylo možno zesílení ještě poněkud zvětšit, avšak požadavek, aby nebyl rezonanční vrchol, tomu brání. Tento požadavek je tedy rozhodující. Aby tedy spektrum odchylky nemělo nežádoucí vrchol, nesmí od počátku s rostoucí frekvencí vzrůstat — musí být pokud možno konstantní.

Tomu odpovídají nulové derivace v počátku.

Při výpočtu optima tímto způsobem narážíme často na nutnost řešení algebraických rovnic řádu vyššího než druhého (na př. u PID regulátoru a soustavy s dopravním zpožděním). Ve speciálním případě, odvozeném autorem tohoto článku, se tato neznáz obchází tím, že je vyšetřována jen frekvenční charakteristika samotného regulačního obvodu bez ohledu na tvar poruchy (tedy vlastně pro poruchu tvaru jednotkového impulsu na výstupu soustavy, což je nejméně příznivé pro regulaci), při čemž bylo možno zavést přibližné vztahy 3 + 9. Podrobnějším rozбором se dá ukázat, že tato přibližnost má za následek, že se ve výpočtech vyskytují algebraické rovnice nejvýše druhého stupně (na př. případ na obr. 2 a 3 vedl jen k řešení lineárních rovnic). Výsledky získané tímto způsobem platí sice pro přísnější podmínky pro kvalitu regulace, ale to snad nemůže být na závadu, zejména ne u případů, kde máme k dispozici jen málo volitelných konstant ve srovnání s řádem soustavy.

Literatura

- [1] H. SARTORIUS, *Angepasste Regelsysteme*, Regelungstechnik 2, 1954.
- [2] A. L. WHITTELEY, *Theory of servo systems, with particular reference to stabilizations*. Journ. of the Inst. of Electr. Eng., vol. 93, part II, 1946.

Obr. 1.
Obr. 2.

8. JEDNODUCHÁ NUMERICKÁ METODA PRO VÝPOČET ODEZVY REGULAČNÍCH OBVODŮ

Ing. VÁCLAV PETERKA
Vysoká škola železniční, Praha

8.1 Úvod

Při návrhu regulace nejrůznějších zařízení bývá často třeba alespoň přibližně znát chování soustavy při působení rušivých vlivů. Jelikož časový průběh rušivé veličiny (vstupu) může být nejrůznějšího tvaru, vyšetřuje se zpravidla odezva regulační soustavy v případě nejnepříznivějších, t. j. při změně vstupu skokem, nebo se vyšetřuje odezva na jednotkový impuls. Chování regulační soustavy popisuje soustava integrodiferenciálních rovnic, které ve většině případů spojitá regulace lze pro malé výchylky linearisovat. Eliminací veličin, které nás nezajímají, získáme lineární diferenciální rovnici, která určuje závislost výstupu regulačního obvodu na jeho vstupu (časového průběhu regulované veličiny na průběhu rušivé veličiny).

K analytickému řešení takovéto diferenciální rovnice je třeba určit kořeny její charakteristické rovnice, což činí obtížné u rovnice vysokých stupňů. Moderní operátorové metody řešení lineární diferenciální rovnice značně urychlí, zejména snadným zavedením počátečních podmínek, avšak nutnost stanovení kořenů charakteristické rovnice neodstraní. Proto byla vedle diferenciálních analyzátorů, analogů a jiných počítačích pomůcek, které nemá praktik vždy po ruce, vypracována řada metod, které nevyžadují znalost kořenů charakteristické rovnice. U těchto moderních výpočtových metod můžeme pozorovat v dosavadním vývoji dva hlavní směry.

První skupina těchto metod využívá souvislosti mezi odezvou a frekvenční charakteristikou (nebo zobecnělou frekvenční charakteristikou). Patří sem na př. metoda SOLODOVNIKOVY [1], FLOYDOVA [2] a LEONHARDOVA [3, 4].

Druhý směr tvoří metody, které vycházejí z nahrazení časových funkcí řadou impulsů různých tvarů. Z těchto metod uvedme alespoň metodu TUSTINOVY [5] a v poslední době publikovanou metodu BOXERA a THALLERA [6].

Metody první skupiny jsou většinou grafiko-numerické nebo používají i mechanických pomůcek, kdežto metody druhé skupiny jsou čistě numerické. K nevýhodám druhé skupiny patří, že k porozumění těchto metod je třeba vyšších theoretických znalostí, takže stěží mohou nalézt uplatnění v širokém okruhu zájemců z praxe. Naproti tomu metody vycházející z frekvenční charakteristiky jsou dobře srozumitelné, avšak jenom vynesení frekvenční charakteristiky, které je většinou třeba provádět bod po bodu, zabere mnoho času, takže praktik často od výpočtu raději upustí.

Z těchto důvodů jsme se na katedře strojní mechaniky Vysoké školy železniční z popudu doc. Ing. Dr. Nekolného zabývali hledáním jiných numerických metod, které by byly jednoduché a rychle vedly k cíli. Jedním z výsledků této snahy je předkládaná práce.

Uváděná metoda předpokládá znalost jenom několika základních pravidel operátorového počtu, založeného na Laplaceově transformaci, který je v teorii samočinné regulace běžně používán. Spočívá na numerickém řešení integrální rovnice Volterrového druhého typu, na kterou lze diferenciální rovnici přechodového procesu vždy převést. Při tom k vyčíslení integrálu v ní se vyskytujícího (konvolutorního integrálu) je použito všeobecně známého lichoběžníkového pravidla. To umožňuje upravit numerické vyčíslení průběhu odezvy do přehledné tabulky, kterou stačí mechanicky vyplnit. Postup při praktickém výpočtu je zřejmý z připojených příkladů.

8.2. Numerický výpočet odezvy regulačního obvodu, je-li dán jeho přenos v operátorovém tvaru

Vyjádříme-li z transformované diferenciální rovnice (resp. soustavy takových rovnic) popisující chování regulační soustavy, obraz výstupu $Y(p)$, obdržíme pro případ, že byla soustava na počátku v klidu:

$$Y(p) = D(p) X(p),$$

kde $X(p)$ je obraz vstupu (rozhovové funkce) a výraz $D(p)$ označujeme jako přenos regulačního obvodu mezi vstupem a výstupem. Výraz pro obraz výstupu lze vždy upravit do tvaru

$$Y(p) = \frac{U(p)}{1 + Z(p)}, \quad (1)$$

kde $U(p)$ a $Z(p)$ jsou funkce komplexní proměnné p , u kterých známe póly, takže můžeme postupem v operátorovém počtu obvyklým nalézt jim příslušné originály. Funkce $U(p)$ a $Z(p)$ nejsou dány jednoznačně a jejich výběr lze provést různě, jak si ukážeme dále.

Na možnost takovéto úpravy Laplaceova obrazu odezvy ukazuje prof. BLOCH ve svém příspěvku do sborníku vědeckých prací Moskevského inženýrsko-fyzikálního institutu [7] a využívá ji k přibližnému řešení odezvy tak, že provede ve vztahu (1) naznačené dělení a dostane nekonečnou řadu

$$Y(p) = U(p) - U(p)Z(p) + U(p)Z^2(p) - \dots \quad (2)$$

Je-li dáno známo póly funkcí $U(p)$ a $Z(p)$, známe i póly všech členů řady (2) a můžeme k nim snadno nalézt originály

$$y(t) = u(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots \quad (3)$$

Důkaz konvergence řady funkcí (3) provádí prof. Bloch tak, že celou rovnici (1) násobí jmenovatelem pravé strany a jednoduchou úpravou obdrží vztah

$$Y(p) = U(p) - Z(p)Y(p)$$

Souděna obrazů na pravé straně odpovídá konvoluce jejich originálů, takže můžeme psát

$$y(t)u(t) = \int_0^t z(t-\tau)y(\tau)d\tau \quad (4)$$

kde $y(t)$, $u(t)$ a $z(t)$ jsou originály k obrazům $Y(p)$, $U(p)$ a $Z(p)$.

Tímto způsobem obdržíme Volterrovu integrální rovnici druhého typu, o které je známo, že rozvedena v řadu (3) konverguje pro libovolné konečné t . Je zřejmé, že tato přibližná metoda výpočtu odezvy regulárního obvodu pomocí řady funkcí (3) je jen tehdy použitelná, můžeme-li se omezit jen na několik málo členů této řady. Závěrem však říká prof. Bloch, že to lze udělat s dostatečnou přesností, pokud je koeficient $z(t)$ s velkým koeficientem zesílení by bylo třeba přerušit řadu. Protože $Z(p) = Z(p)$, aby bylo dosaženo potřebné přesnosti při malém zesílení řady.

Opustíme myšlenku přibližného řešení regulárního obvodu pomocí řady funkcí (3) a vrátíme se k rovnici (4), která prof. Bloch užívá pouze k důkazu konvergence řady (3). Obdržíme nejprve jen konvolutorní integrál

na pravé straně rovnice (4) a nalezneme její hodnotu pro jeho hodnotu pomocí lichoběžníkového pravidla. Za tím účelem předpokládáme na chvíli, že známe průběh odezvy $y(t)$ a že má na př. tvar podle obr. 1. Funkce $z(t)$ nechť má průběh podle obr. 2.

Obr. 1.
Obr. 2.

Abychom rozlišili proměnnou, podle které integraci provádíme, a horní mez integrálu, zavádíme označení τ pro čas, který můžeme nazvat „uplynulým“ na rozdíl od času t , „práve probíhajícího“. Nápornou představu o hodnotě integrálu I získáme tím, že oba průběhy z obr. 1 a 2 nakreslíme nad sebe tak, že jeden z nich, na př. $z(\tau)$, kreslíme jako zrcadlový obraz vzhledem k ose počadnic a počátky obou průběhů posuneme od sebe o vzdálenost odpovídající času práve uvažovaného okamžiku (obr. 3). Hodnota konvolutorního integrálu I je pak určena plochou pod křivkou, jejíž počadnice jsou dány součinem počadnic z a y na téže vertikále. Rozdělíme časový interval t na k příměřeně malých dílků Δ a plochu odpovídající konvolutornímu integrálu nahradíme součtem ploch lichoběžníků tvořených počadnicemi křivky po úsecích Δ . Postup je zřejmý z obr. 3. Počadnice funkcí $z(\tau)$ a $y(\tau)$ po intervalech Δ označujeme indexy tak,

Obr. 3.

jak se sebou následují od počátků. Konvolutorní integrál můžeme podle toho vyjádřit přibližným vztahem

$$I = (y_0 z_0 + y_1 z_{-1} + y_2 z_{-2} + \dots + y_{k-1} z_1 + \frac{1}{2} y_k z_0) \Delta = \\ = \frac{y_0}{2} z_0 \Delta + y_1 \frac{z_0 \Delta}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} y_i z_{k-i} \Delta \quad \text{pro } k \geq 1, \quad (5) \\ I = 0 \dots \text{pro } k = 0.$$

Uvažujeme-li hodnoty funkcí po intervalech Δ , můžeme Volterrovu integrální rovnici (4) nahradit přibližným vztahem

$$y_k = u_k - \frac{y_0}{2} z_k \Delta - y_1 \frac{z_k \Delta}{2} - \sum_{i=1}^{k-1} y_i z_{k-i} \Delta.$$

Jednoduchou úpravou získáme

$$y_k \left(1 + \frac{z_k \Delta}{2}\right) = u_k - \frac{y_0}{2} z_k \Delta - \sum_{i=1}^{k-1} y_i z_{k-i} \Delta$$

a označíme-li

$$1 + \frac{1}{\frac{z_k \Delta}{2}} = x; \quad u_k x = \bar{u}_k; \quad z_k \Delta x = \bar{z}_k, \quad (6)$$

můžeme psát

$$y_k = \bar{u}_k - \frac{\bar{y}_0}{2} \bar{z}_k - \sum_{i=1}^{k-1} y_i \bar{z}_{k-i} \dots \dots \dots k \geq 1, \quad (7)$$

$y_0 = u_0$ (bez pruhu).

Tak dostáváme rekurentní relaci, která nám umožňuje určení hodnoty odezvy y_k ze známé předchozí hodnoty y_{k-1} . Potřebné hodnoty funkcí $u(t)$ a $z(t)$ vyčíslíme postupem v operátorovém počtu obvyklým, neboť póly jejich obrazů jsou známy.

O tom, jak je relace (7) vhodná pro vyčíslení průběhu odezvy, se přesvědčíme, rozvedeme-li ji podle k .

$$\begin{aligned}
 y_0 &= u_0, \\
 y_1 &= \bar{u}_1 - \frac{y_0}{2} \bar{z}_1, \\
 y_2 &= \bar{u}_2 - \frac{y_0}{2} \bar{z}_2 - y_1 \bar{z}_1, \\
 y_3 &= \bar{u}_3 - \frac{y_0}{2} \bar{z}_3 - y_1 \bar{z}_2 - y_2 \bar{z}_1, \\
 y_4 &= \bar{u}_4 - \frac{y_0}{2} \bar{z}_4 - y_1 \bar{z}_3 - y_2 \bar{z}_2 - y_3 \bar{z}_1, \\
 &\text{atd.}
 \end{aligned}$$

Vidíme, že tak dostáváme velmi vhodnou šablonu pro postupné vyčíslení bodů odezvy.

Při výpočtu můžeme postupovat přehledně podle tabulky 1. Hodnoty $u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ atd., až do času, do kterého chceme odezvu sledovat, vyplíšeme do prvního sloupce za silnější svislou čarou. Hodnoty z_1, z_2, z_3 atd. vyplíšeme nalevo od silné čáry avšak o řádek výše. Hodnota u_0 je zároveň hodnotou y_0 a přepíšeme ji proto nad další volný sloupec. Záporně vzatou polovinou této hodnoty vynásobíme hodnoty z_1, z_2, z_3 atd. a výsledky tohoto násobení přepíšeme do sloupce pod hodnotu y_0 , počínaje řádkem o jeden nižším, než je u_0 , tak jako bychom hodnoty z_1, z_2, z_3, \dots posunuli řádkem o jeden nižším, než je u_0 , tak jako bychom hodnoty z_1, z_2, z_3, \dots posunuli po úhlopříčce vpravo dolů. Sečteme řádek počínající \bar{u}_1 a výsledek y_1 napíšeme nad další volný sloupec. Vynásobíme hodnotou $-y_1$ všechna z a jednotlivé součiny přepíšeme do sloupce pod y_1 , opět o řádek níže. Sečtením dalšího řádku dostáváme hodnotu y_2 a tak postupujeme stále dál. Na nejhodnější řádek se nám postupně řadí hodnoty hledané odezvy po časových intervalech Δ . Výpočet si usnadníme tím, že si hodnoty z_1, z_2, z_3 atd. vyplíšeme na proužek papíru, kterým pak posouváme.

V mnoha praktických případech je $z_0 = 0$ a tudíž $\kappa = 1$, takže redukcí koeficientem κ není třeba provádět.

Tabulka 1.

z_i		y_0	y_1	y_2	y_3	$y_4 \dots$
\bar{z}_1	u_0					
\bar{z}_2	\bar{u}_1	$-\frac{y_0}{2} \bar{z}_1$				
\bar{z}_3	\bar{u}_2	$-\frac{y_0}{2} \bar{z}_2$	$-y_1 \bar{z}_1$			
\vdots	\vdots	$-\frac{y_0}{2} \bar{z}_3$	$-y_1 \bar{z}_2$	$-y_2 \bar{z}_1$		
\vdots	\bar{u}_4	$-\frac{y_0}{2} \bar{z}_4$	$-y_1 \bar{z}_3$	$-y_2 \bar{z}_2$	$-y_3 \bar{z}_1$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Volba funkcí $U(p)$, $Z(p)$ a intervalu Δ .

V předchozím výkladu jsme si ukázali, jak lze diferenciální rovnici přechodového procesu lineární regulační soustavy převést na integrální rovnici Volterrovu druhého typu a jak lze tuto rovnici numericky řešit pomocí tabulky 1. Při tom jsme předpokládali Laplaceův obraz výstupu již upravený do tvaru

$$Y(p) = \frac{U(p)}{1 + Z(p)}, \quad (1)$$

kde $U(p)$ a $Z(p)$ jsou funkce komplexní proměnné p , k nimž umíme jednoduše nalézt příslušné originály. Funkce $U(p)$ a $Z(p)$ je možno volit různě. Všimneme si zde jen dvou možností jejich volby, které se jeví s hlediska rychlosti výpočtu nejvýhodnější.

První z nich spočívá na tom, že přenos, resp. diferenciální rovnici přechodového procesu, která bývá často velmi vysokého řádu, získáváme eliminací proměnných ze soustavy diferenciálních rovnic popisujících chování jednotlivých členů soustavy. Pro jednoduchost a názornost výkladu ukážeme si postup na soustavě dvou simultánních diferenciálních rovnic, jež transformovány mají tvar

$$\begin{aligned}
 D_{11}X_1 + D_{12}X_2 &= R_1, \\
 D_{21}X_1 + D_{22}X_2 &= R_2,
 \end{aligned}$$

kde D jsou lineární diferenciální operátory typu $Ap^2 + Bp + C$, X obrazy neznámých funkcí a R jsou obrazy rozrušových funkcí (nemí-li soustava na počátku v klidu, jsou k nim zahrnuty i operátory počátečních podmínek). Koeficienty operátorů D snadno určíme, neboť popisují-li fyzikální soustavu, bývají maximálně druhého řádu. Budiž na př. X_1 obrazem výstupu regulační soustavy, který vyšetřujeme. Řešení soustavy rovnic (6) podle této neznámé můžeme upravit do tvaru

$$X_1 = \frac{R_1 D_{22} - D_{21} R_2}{D_{11} D_{22} - D_{21} D_{12}} = \frac{R_1 D_{22} - D_{21} R_2}{1 - \frac{D_{21} D_{12}}{D_{11} D_{22}}} = \frac{U(p)}{1 + Z(p)},$$

kde jsme čitatele i jmenovatele dělili součinem operátorů $D_{11}D_{22}$ za předpokladu, že $D_{11}D_{22}$ je vyššího nebo maximálně stejného řádu jako $D_{21}D_{12}$. Kdyby tomu tak nebylo, provedli bychom dělení součinem operátorů $D_{21}D_{12}$.

U soustavy libovolného počtu simultánních diferenciálních rovnic bude postup stejný, jenom ve jmenovateli funkcí $U(p)$ a $Z(p)$ se objeví součin většího počtu operátorů a v čitateli se objeví další členy. Protože ve jmenovateli obou výrazů $U(p)$ a $Z(p)$ jsou pouze součiny operátorů, jejichž kořeny známe, můžeme k nim snadno nalézt originály $u(t)$ a $z(t)$.

V podstatě tímž postupem lze provést úpravu obrazu výstupu, je-li dáno blokové schéma regulačního obvodu s přenosy jednotlivých článků (viz příložený příklad 1 a 3).

Jiná možnost je, že obraz odezvy regulační soustavy upravíme do obvyklého tvaru

$$y(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n}, \quad m < n. \quad (9)$$

Čitatele i jmenovatele tohoto výrazu dělíme p^n a obdržíme:

$$Y(p) = \frac{\frac{b_0}{p^{n-m}} + \frac{b_1}{p^{n-m+1}} + \frac{b_2}{p^{n-m+2}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{p^{n-1}} + \frac{b_m}{p^n}}{1 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{a_n}{p^n}}.$$

Potom jest

$$U(p) = \frac{b_0}{p^{n-m}} + \frac{b_1}{p^{n-m+1}} + \frac{b_2}{p^{n-m+2}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{p^{n-1}} + \frac{b_m}{p^n}$$

$$Z(p) = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{a_n}{p^n},$$

a snadno nalezneme

$$u(t) = \frac{b_0}{(n-m-1)!} t^{n-m-1} + \frac{b_1}{(n-m)!} t^{n-m} + \dots + \frac{b_n}{(n-1)!} t^{n-1}, \quad (10)$$

$$z(t) = a_1 + a_2 t + \frac{a_3}{2!} t^2 + \dots + \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1}.$$

Přesto, že v tomto druhém případě je nalezení funkcí $u(t)$ a $z(t)$ velmi snadné (resp. je můžeme psát přímo), bývá první postup ve složitějších případech (jako je na př. příklad 3 dále uvedený) výhodnější, jelikož odpadá pronásobování operátorů D při úpravě přenosu do tvaru (9). Tato úprava je u složitějších soustav již sama o sobě dosti pracná, nehledě k tomu, že nemáme kontrolu, zda jsme při ní neudělali chybu. Jak dobře lze kontrolovat výpočet při prvním z uvedených postupů, je patrné z příkladu 3, kde je uveden výpočet odezvy regulačního obvodu, jejíž charakteristická rovnice je desátého stupně. Výhodou druhého postupu je, že k vyčíslení $u(t)$ a $z(t)$ není třeba tabulek.

Než přistoupíme k praktickým výpočtům, zmíníme se ještě několika slovy o volbě časového intervalu Δ . Čím menší je tento interval, tím přesnější bude řešení, avšak tím více roste objem číselných operací, které je třeba provést k získání odezvy potřebné délky. Při praktickém výpočtu lze dobře postupovat tak, že interval Δ odhadneme podle fyzikálního charakteru soustavy, vypočteme prvních několik hodnot u_k a z_k (většinou stačí 2 až 3 hodnoty) a dosazením do tabulky 1 získáme příslušné přibližné hodnoty odezvy. Podle jejich souslednosti vidíme, zda byl interval volen správně, či zda je ho třeba opravit. Jak dobré výsledky dává metoda i při poměrně velmi hrubém intervalu Δ , je patrné z následujících příkladů.

Příklady

Příklad 1. Hledáme na jednotkový impuls regulačního obvodu na obr. 4. Jde o soustavu 1. řádu regulovanou integračním regulátorem. Pro takovýto jednoduchý případ můžeme snadno nalézt i přesné řešení a porovnat je s výsledkem, který dává popsaná metoda.

Obr. 4.

Celkový přenos obvodu je

$$D(p) = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p) G_2(p)} = \frac{\frac{1}{1+pT_1}}{1 + \frac{1}{T_2 p(1+pT_1)}},$$

což jest již zároveň Laplaceův obraz odezvy na jednotkový impuls. Časové konstanty nechť jsou $T_1 = 1$ s, $T_2 = 2$ s.

$$Y(p) = \frac{\frac{1}{1+p}}{1 + \frac{1}{2p(1+p)}} = \frac{U(p)}{1 + Z(p)}$$

Snadno nalezneme

$$U(t) = e^{-t}, \quad z(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-t}).$$

Interval volně 0,4 s. Pomocí tabulek e^x vyčíslíme:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_k	0,670	0,449	0,301	0,202	0,135	0,091	0,061	0,041	0,027	0,018	0,012	0,008
z_k	0,165	0,275	0,349	0,399	0,432	0,455	0,470	0,480	0,486	0,491	0,494	0,496

Jelikož $z_0 = 0$, jest $u_k = s_k \cdot z_k$ a po dosazení do tabulky 1 obdržíme

0,065	1	0,637	0,352	0,138	-0,015	-0,016	-0,177	-0,205	-0,211	-0,201		
0,110	0,670	-0,033										
0,140	0,449	-0,055	-0,042									
0,160	0,301	-0,070	-0,076	-0,023								
0,173	0,202	-0,080	-0,089	-0,039	-0,009							
0,188	0,135	-0,087	-0,102	-0,049	-0,013	+0,001						
0,192	0,091	-0,091	-0,110	-0,056	-0,019	+0,002	+0,008					
0,195	0,061	-0,094	-0,116	-0,051	-0,022	+0,002	+0,013	+0,012				
0,196	0,041	-0,096	-0,126	-0,064	-0,024	+0,002	+0,016	+0,020	+0,014			
	0,027	-0,097	-0,122	-0,066	-0,023	+0,003	+0,019	+0,025	+0,023	+0,014		
	0,018	-0,098	-0,124	-0,068	-0,020	+0,003	+0,020	+0,028	+0,029	+0,023	+0,013	

V obr. 5 křivka „a“ představuje přesné řešení naší úlohy a hodnoty označené křížkem jsou námi získané pro interval $A = 0,04$ s.

Obr. 5.

Abychom si ukázali, jak se volbou hrubšího intervalu A zmenší počet potřebných operací při zachování postačující přesnosti, opakujeme výpočet pro dvojnásobný interval $A = 0,08$ s.

0,220	1	0,339	-0,033	-0,192	-0,222	-0,186						
0,319	0,449	-0,110										
0,384	0,202	-0,160	-0,075									
0,393	0,091	-0,182	-0,108	+0,007								
	0,041	-0,192	-0,123	+0,010	+0,042							
	0,018	-0,196	-0,130	+0,012	+0,061	+0,040						

Zkrácení výpočtu pro vyčíslení odezvy téže délky jako v předchozím případě je zřejmé. Výsledky jsou pro porovnání vyneseny do obr. 5 a označeny kroužkem.

Příklad 2. Vyšetřme odezvu na jednotkový skok regulačního obvodu z předchozího příkladu a postupujeme při tom druhým ze způsobů výše uvedených. Laplaceův obraz odezvy upravíme do tvaru (9)

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + p + 0,5} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{p} + \frac{0,5}{p}} = \frac{U(p)}{1 + Z(p)}$$

Ve shodě se vzorcí (10) jest

$$u(t) = t, \\ z(t) = 1 - 0,05t.$$

Jelikož funkce $z(t)$ má nenulovou počáteční hodnotu, je třeba provést redukci koeficientem x . Volíme-li interval $A = 0,04$ s, bude

$$\tilde{u}_k = xu_k = xAk = \frac{1}{2}k, \\ z_k = xA(1 + 0,5Ak) = \frac{1}{2}(1 + 0,2k).$$

Tyto výrazy snadno vyčíslíme a dosazením do tabulky 1 obdržíme:

0,400	0	0,333	0,534	0,530	0,655	0,626	0,566	0,488	0,404	0,317	0,241	
0,467	0											
0,533	0,333	0										
0,600	0,667	0	-0,133									
0,667	1,000	0	-0,150	-0,214								
0,733	1,333	0	-0,177	-0,249	-0,252							
0,800	1,667	0	-0,200	-0,285	-0,294	-0,263						
0,867	2,000	0	-0,222	-0,320	-0,336	-0,306	-0,250					
0,933	2,333	0	-0,244	-0,356	-0,378	-0,349	-0,292	-0,226				
1,000	2,667	0	-0,266	-0,391	-0,420	-0,393	-0,334	-0,264	-0,193			
1,067	3,000	0	-0,289	-0,427	-0,462	-0,437	-0,370	-0,302	-0,228	-0,162		
1,133	3,333	0	-0,311	-0,463	-0,504	-0,480	-0,418	-0,340	-0,260	-0,180	-0,127	

Křivka „b“ v obr. 5. je přesným řešením příkladu a body označené křížkem jsou hodnoty námi získané.

Příklad 3. Jako příklad složitějšího případu uvedme vyšetření odezvy regulačního obvodu na obr. 6 na jednotkový skok. Jde o regulaci válcovací stolice a řešení bylo provedeno pro potřebu praxe. Úloha vede na diferenciální rovnici desátého řádu.Obr. 6.
Obr. 7.

Nejprve upravíme schéma do tvaru na obr. 7. Celý přenos obvodu jest

$$D(p) = \frac{G_1 \cdot G_3}{1 + G_1 \cdot G_3 + G_1 \cdot G_2}$$

Obraz odezvy na jednotkový skok obdržíme jako součin obrazu vstupu $\frac{1}{p}$ a přenosu $D(p)$

$$Y(p) = D(p) \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \frac{G_1 G_3}{1 + G_1 G_3 + G_1 G_2} = \frac{U(p)}{1 + Z(p)}$$

$$U(p) = \frac{1}{p} G_1 G_2 = \frac{26,264(0,37p + 1)}{p(0,48p + 1)(1,81p + 1)(0,05 \cdot 10^{-3}p + 1)(0,0185p + 1)(4,710^{-3}p + 1)}$$

$$Z(p) = \frac{26,264(0,37p + 1)}{(0,48p + 1)(1,81p + 1)(0,05 \cdot 10^{-3}p + 1)(0,0185p + 1)(4,7 \cdot 10^{-3}p + 1)} +$$

$$+ \frac{109,5(0,207p + 1)}{(0,48p + 1)(1,81p + 1)(0,05 \cdot 10^{-3}p + 1)}$$

Jelikož jmenovatele funkcí $U(p)$ a $Z(p)$ máme již ve tvaru součinu jednoduchých dvojčlenů, můžeme přímo psát jejich Heavisideův rozvoj. Tak pro $u(t)$ platí

$$u(t) = C_0 + C_1 e^{-\frac{t}{0,48}} + C_2 e^{-\frac{t}{1,81}} + C_3 e^{-\frac{t}{0,05 \cdot 10^{-3}}} + C_4 e^{-\frac{t}{0,0185}} + C_5 e^{-\frac{t}{4,7 \cdot 10^{-3}}}$$

Konstanty rozvoje určíme podle známých pravidel

$$C_0 = [pU(p)]_{p=0} = 26,264$$

$$C_1 = \left(-\frac{1,81}{0,48} + 1 \right) \left(-\frac{0,005 \cdot 10^{-3}}{0,48} + 1 \right) \left(-\frac{0,0185}{0,48} + 1 \right) \left(-\frac{4,7 \cdot 10^{-3}}{0,48} + 1 \right) =$$

$$= +2,311$$

a podobně určíme další konstanty

$$C_2 = -23,901, \quad C_3 = -0,148, \quad C_4 = +0,412, \quad C_5 = +0,062$$

Jelikož $u(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} (pU(p)) = 0$, musí platit

$$C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 0$$

Dosažením vypočtených konstant kontrolujeme, zda jsme při jejich výpočtu neudělali chybu:

$$26,264 + 2,311 - 23,901 - 0,148 + 0,412 + 0,062 = 0,000$$

Při rozvoji funkce $Z(p)$ využijeme toho, že první její část se až na činitel p ve jmenovateli shoduje s funkcí $U(p)$. Stačí tedy provést rozvoj jenom druhé části. Rozvoj první části je derivací $u(t)$.

$$z(t) = -\frac{C_1}{0,48} e^{-\frac{t}{0,48}} - \frac{C_2}{1,81} e^{-\frac{t}{1,81}} - \frac{C_3}{0,05 \cdot 10^{-3}} e^{-\frac{t}{0,05 \cdot 10^{-3}}} - \frac{C_4}{0,0185} e^{-\frac{t}{0,0185}} -$$

$$- \frac{C_5}{4,7 \cdot 10^{-3}} e^{-\frac{t}{4,7 \cdot 10^{-3}}} + C_6 e^{-\frac{t}{0,48}} + C_7 e^{-\frac{t}{1,81}} + C_8 e^{-\frac{t}{4,7 \cdot 10^{-3}}}$$

$$C_6 = \frac{109,52 \left(-\frac{0,207}{0,48} + 1 \right)}{0,48 \left(-\frac{1,81}{0,48} + 1 \right) \left(-\frac{0,05 \cdot 10^{-3}}{0,48} + 1 \right)} = -47,43$$

a podobně dostaneme

$$C_7 = 73,17, \quad C_8 = -25,74$$

Kontrolujeme:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (pZ(p)) = 0 = C_6 + C_7 + C_8$$

$$-47,43 + 73,17 - 25,74 = 0,00$$

Shrnutím konstant obdržíme

$$z(t) = K_1 e^{-\frac{t}{0,48}} + K_2 e^{-\frac{t}{1,81}} + K_3 e^{-\frac{t}{0,05 \cdot 10^{-3}}} + K_4 e^{-\frac{t}{0,0185}} + K_5 e^{-\frac{t}{4,7 \cdot 10^{-3}}}$$

$$K_1 = -52,25, \quad K_2 = +89,14, \quad K_3 = -1,39, \quad K_4 = -22,25, \quad K_5 = -13,96$$

kontrola:

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 = -0,01 \approx 0$$

Pro vyřazení hodnot po intervalu Δ upravíme výrazy pro obě funkce do tvaru

$$u_s = C_0 + C_1 \delta_1^s + C_2 \delta_2^s + C_3 \delta_3^s + C_4 \delta_4^s + C_5 \delta_5^s$$

$$z_s = K_1 \delta_1^s + K_2 \delta_2^s + K_3 \delta_3^s + K_4 \delta_4^s + K_5 \delta_5^s$$

kde je

$$\delta_1 = e^{-\frac{\Delta}{0,48}}, \quad \delta_2 = e^{-\frac{\Delta}{1,81}}, \quad \delta_3 = e^{-\frac{\Delta}{0,05 \cdot 10^{-3}}}, \quad \delta_4 = e^{-\frac{\Delta}{0,0185}}, \quad \delta_5 = e^{-\frac{\Delta}{4,7 \cdot 10^{-3}}}$$

Interval Δ byl nejprve odhadnut na 0,05 sec. Byly vyřazeny hodnoty u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 a dosazeny do tab. 1. Z výsledků bylo patrné, že je interval příliš hrubý a proto byl opraven na hodnotu $\Delta = 0,02$ sec. Vyřazení hodnot u_s a $z_s = \Delta z$ pro tento

stroji). Kontrolu výpočtu provádíme tak, že sledujeme přírůstky funkcí $u(t)$ a $z(t)$. Vyřazení tabulky 1 (viz str. 8) bylo s výhodou provedeno na logaritmickém pravítku (vyřazení celého sloupce pouhým posouváním jezdeck). Získaná odezva je vynesena v grafu na obr. 8 (str. 8).

Obr. 7.
Obr. 8.

Z výpočtu je patrné, že malé časové konstanty ovlivní pouze počáteční hodnoty funkcí $u(t)$ a $z(t)$ a tím též průběh odezvy nejvíce v náběhové části.

8.3. Regulační obvody s dopravním zpožděním

Popsanou metodou lze vyšetřovat i regulační obvody s dopravním zpožděním. Ukážeme si postup na typickém zapojení tohoto druhu znázorněním blokovým schématem na obr. 9. Takové schéma může vzniknout zjednodušením

Obr. 9.

daleko složitějšího schématu třeba i s několika zpětnými vazbami, takže pól přenosů $W(p)$ a $V(p)$ obecně neznáme.

Přenos celého obvodu jest

$$D(p) = \frac{e^{-\tau p} W(p)}{1 + e^{-\tau p} W(p) V(p)} \quad (11)$$

Neznáme-li póly funkcí $W(p)$ a $V(p)$, upravíme je do tvaru

$$W(p) = \frac{U_1(p)}{1 + Z_1(p)}, \quad V(p) = \frac{U_2(p)}{1 + Z_2(p)} \quad (12)$$

		k				
		9^1	K_1	d_1	$C_1 A_1^1$	
		d_2	K_2	d_3	$C_2 A_2^1$	
		d_4	K_3	d_5	$C_3 A_3^1$	
		d_6	K_4	d_7	$C_4 A_4^1$	
		d_8	K_5	d_9	$C_5 A_5^1$	
		d_{10}	K_6	d_{11}	$C_6 A_6^1$	
		d_{12}	K_7	d_{13}	$C_7 A_7^1$	
		d_{14}	K_8	d_{15}	$C_8 A_8^1$	
		d_{16}	K_9	d_{17}	$C_9 A_9^1$	
		d_{18}	K_{10}	d_{19}	$C_{10} A_{10}^1$	
		d_{20}	K_{11}	d_{21}	$C_{11} A_{11}^1$	
		d_{22}	K_{12}	d_{23}	$C_{12} A_{12}^1$	
		d_{24}	K_{13}	d_{25}	$C_{13} A_{13}^1$	
		d_{26}	K_{14}	d_{27}	$C_{14} A_{14}^1$	
		d_{28}	K_{15}	d_{29}	$C_{15} A_{15}^1$	
		d_{30}	K_{16}	d_{31}	$C_{16} A_{16}^1$	
		d_{32}	K_{17}	d_{33}	$C_{17} A_{17}^1$	
		d_{34}	K_{18}	d_{35}	$C_{18} A_{18}^1$	
		d_{36}	K_{19}	d_{37}	$C_{19} A_{19}^1$	
		d_{38}	K_{20}	d_{39}	$C_{20} A_{20}^1$	
		d_{40}	K_{21}	d_{41}	$C_{21} A_{21}^1$	
		d_{42}	K_{22}	d_{43}	$C_{22} A_{22}^1$	
		d_{44}	K_{23}	d_{45}	$C_{23} A_{23}^1$	
		d_{46}	K_{24}	d_{47}	$C_{24} A_{24}^1$	
		d_{48}	K_{25}	d_{49}	$C_{25} A_{25}^1$	
		d_{50}	K_{26}	d_{51}	$C_{26} A_{26}^1$	
		d_{52}	K_{27}	d_{53}	$C_{27} A_{27}^1$	
		d_{54}	K_{28}	d_{55}	$C_{28} A_{28}^1$	
		d_{56}	K_{29}	d_{57}	$C_{29} A_{29}^1$	
		d_{58}	K_{30}	d_{59}	$C_{30} A_{30}^1$	
		d_{60}	K_{31}	d_{61}	$C_{31} A_{31}^1$	
		d_{62}	K_{32}	d_{63}	$C_{32} A_{32}^1$	
		d_{64}	K_{33}	d_{65}	$C_{33} A_{33}^1$	
		d_{66}	K_{34}	d_{67}	$C_{34} A_{34}^1$	
		d_{68}	K_{35}	d_{69}	$C_{35} A_{35}^1$	
		d_{70}	K_{36}	d_{71}	$C_{36} A_{36}^1$	
		d_{72}	K_{37}	d_{73}	$C_{37} A_{37}^1$	
		d_{74}	K_{38}	d_{75}	$C_{38} A_{38}^1$	
		d_{76}	K_{39}	d_{77}	$C_{39} A_{39}^1$	
		d_{78}	K_{40}	d_{79}	$C_{40} A_{40}^1$	
		d_{80}	K_{41}	d_{81}	$C_{41} A_{41}^1$	
		d_{82}	K_{42}	d_{83}	$C_{42} A_{42}^1$	
		d_{84}	K_{43}	d_{85}	$C_{43} A_{43}^1$	
		d_{86}	K_{44}	d_{87}	$C_{44} A_{44}^1$	
		d_{88}	K_{45}	d_{89}	$C_{45} A_{45}^1$	
		d_{90}	K_{46}	d_{91}	$C_{46} A_{46}^1$	
		d_{92}	K_{47}	d_{93}	$C_{47} A_{47}^1$	
		d_{94}	K_{48}	d_{95}	$C_{48} A_{48}^1$	
		d_{96}	K_{49}	d_{97}	$C_{49} A_{49}^1$	
		d_{98}	K_{50}	d_{99}	$C_{50} A_{50}^1$	
		d_{100}	K_{51}	d_{101}	$C_{51} A_{51}^1$	
		d_{102}	K_{52}	d_{103}	$C_{52} A_{52}^1$	
		d_{104}	K_{53}	d_{105}	$C_{53} A_{53}^1$	
		d_{106}	K_{54}	d_{107}	$C_{54} A_{54}^1$	
		d_{108}	K_{55}	d_{109}	$C_{55} A_{55}^1$	
		d_{110}	K_{56}	d_{111}	$C_{56} A_{56}^1$	
		d_{112}	K_{57}	d_{113}	$C_{57} A_{57}^1$	
		d_{114}	K_{58}	d_{115}	$C_{58} A_{58}^1$	
		d_{116}	K_{59}	d_{117}	$C_{59} A_{59}^1$	
		d_{118}	K_{60}	d_{119}	$C_{60} A_{60}^1$	
		d_{120}	K_{61}	d_{121}	$C_{61} A_{61}^1$	
		d_{122}	K_{62}	d_{123}	$C_{62} A_{62}^1$	
		d_{124}	K_{63}	d_{125}	$C_{63} A_{63}^1$	
		d_{126}	K_{64}	d_{127}	$C_{64} A_{64}^1$	
		d_{128}	K_{65}	d_{129}	$C_{65} A_{65}^1$	
		d_{130}	K_{66}	d_{131}	$C_{66} A_{66}^1$	
		d_{132}	K_{67}	d_{133}	$C_{67} A_{67}^1$	
		d_{134}	K_{68}	d_{135}	$C_{68} A_{68}^1$	
		d_{136}	K_{69}	d_{137}	$C_{69} A_{69}^1$	
		d_{138}	K_{70}	d_{139}	$C_{70} A_{70}^1$	
		d_{140}	K_{71}	d_{141}	$C_{71} A_{71}^1$	
		d_{142}	K_{72}	d_{143}	$C_{72} A_{72}^1$	
		d_{144}	K_{73}	d_{145}	$C_{73} A_{73}^1$	
		d_{146}	K_{74}	d_{147}	$C_{74} A_{74}^1$	
		d_{148}	K_{75}	d_{149}	$C_{75} A_{75}^1$	
		d_{150}	K_{76}	d_{151}	$C_{76} A_{76}^1$	
		d_{152}	K_{77}	d_{153}	$C_{77} A_{77}^1$	
		d_{154}	K_{78}	d_{155}	$C_{78} A_{78}^1$	
		d_{156}	K_{79}	d_{157}	$C_{79} A_{79}^1$	
		d_{158}	K_{80}	d_{159}	$C_{80} A_{80}^1$	
		d_{160}	K_{81}	d_{161}	$C_{81} A_{81}^1$	
		d_{162}	K_{82}	d_{163}	$C_{82} A_{82}^1$	
		d_{164}	K_{83}	d_{165}	$C_{83} A_{83}^1$	
		d_{166}	K_{84}	d_{167}	$C_{84} A_{84}^1$	
		d_{168}	K_{85}	d_{169}	$C_{85} A_{85}^1$	
		d_{170}	K_{86}	d_{171}	$C_{86} A_{86}^1$	
		d_{172}	K_{87}	d_{173}	$C_{87} A_{87}^1$	
		d_{174}	K_{88}	d_{175}	$C_{88} A_{88}^1$	
		d_{176}	K_{89}	d_{177}	$C_{89} A_{89}^1$	
		d_{178}	K_{90}	d_{179}	$C_{90} A_{90}^1$	
		d_{180}	K_{91}	d_{181}	$C_{91} A_{91}^1$	
		d_{182}	K_{92}	d_{183}	$C_{92} A_{92}^1$	
		d_{184}	K_{93}	d_{185}	$C_{93} A_{93}^1$	
		d_{186}	K_{94}	d_{187}	$C_{94} A_{94}^1$	
		d_{188}	K_{95}	d_{189}	$C_{95} A_{95}^1$	
		d_{190}	K_{96}	d_{191}	$C_{96} A_{96}^1$	
		d_{192}	K_{97}	d_{193}	$C_{97} A_{97}^1$	
		d_{194}	K_{98}	d_{195}	$C_{98} A_{98}^1$	
		d_{196}	K_{99}	d_{197}	$C_{99} A_{99}^1$	
		d_{198}	K_{100}	d_{199}	$C_{100} A_{100}^1$	
		d_{200}	K_{101}	d_{201}	$C_{101} A_{101}^1$	
		d_{202}	K_{102}	d_{203}	$C_{102} A_{102}^1$	
		d_{204}	K_{103}	d_{205}	$C_{103} A_{103}^1$	
		d_{206}	K_{104}	d_{207}	$C_{104} A_{104}^1$	
		d_{208}	K_{105}	d_{209}	$C_{105} A_{105}^1$	
		d_{210}	K_{106}	d_{211}	$C_{106} A_{106}^1$	
		d_{212}	K_{107}	d_{213}	$C_{107} A_{107}^1$	
		d_{214}	K_{108}	d_{215}	$C_{108} A_{108}^1$	
		d_{216}	K_{109}	d_{217}	$C_{109} A_{109}^1$	
		d_{218}	K_{110}	d_{219}	$C_{110} A_{110}^1$	
		d_{220}	K_{111}	d_{221}	$C_{111} A_{111}^1$	
		d_{222}	K_{112}	d_{223}	$C_{112} A_{112}^1$	
		d_{224}	K_{113}	d_{225}	$C_{113} A_{113}^1$	
		d_{226}	K_{114}	d_{227}	$C_{114} A_{114}^1$	
		d_{228}	K_{115}	d_{229}	$C_{115} A_{115}^1$	
		d_{230}	K_{116}	d_{231}	$C_{116} A_{116}^1$	
		d_{232}	K_{117}	d_{233}	$C_{117} A_{117}^1$	
		d_{234}	K_{118}	d_{235}	$C_{118} A_{118}^1$	
		d_{236}	K_{119}	d_{237}	$C_{119} A_{119}^1$	
		d_{238}	K_{120}	d_{239}	$C_{120} A_{120}^1$	
		d_{240}	K_{121}	d_{241}	$C_{121} A_{121}^1$	
		d_{242}	K_{122}	d_{243}	$C_{122} A_{122}^1$	
		d_{244}	K_{123}	d_{245}	$C_{123} A_{123}^1$	
		d_{246}	K_{124}	d_{247}	$C_{124} A_{124}^1$	
		d_{248}	K_{125}	d_{249}	$C_{125} A_{125}^1$	
		d_{250}	K_{126}	d_{251}	$C_{126} A_{126}^1$	
		d_{252}	K_{127}	d_{253}	$C_{127} A_{127}^1$	
		d_{254}	K_{128}	d_{255}	$C_{128} A_{128}^1$	
		d_{256}	K_{129}	d_{257}	$C_{129} A_{129}^1$	
		d_{258}	K_{130}	d_{259}	$C_{130} A_{130}^1$	
		d_{260}	K_{131}	d_{261}	$C_{131} A_{131}^1$	
		d_{262}	K_{132}	d_{263}	$C_{132} A_{132}^1$	
		d_{264}	K_{133}	d_{265}	$C_{133} A_{133}^1$	
		d_{266}	K_{134}	d_{267}	$C_{134} A_{134}^1$	
		d_{268}	K_{135}	d_{269}	$C_{135} A_{135}^1$	
		d_{270}	K_{136}	d_{271}	$C_{136} A_{136}^1$	
		d_{272}	K_{137}	d_{273}	$C_{137} A_{137}^1$	
		d_{274}	K_{138}	d_{275}	$C_{138} A_{138}^1$	
		d_{276}	K_{139}	d_{277}	$C_{139} A_{139}^1$	
		d_{278}	K_{140}	d_{279}	$C_{140} A_{140}^1$	
		d_{280}	K_{141}	d_{281}	$C_{141} A_{141}^1$	
		d_{282}	K_{142}	d_{283}	$C_{142} A_{142}^1$	
		d_{284}	K_{143}	d_{285}	$C_{143} A_{143}^1$	
		d_{286}	K_{144}	d_{287}	$C_{144} A_{144}^1$	
		d_{288}	K_{145}	d_{289}	$C_{145} A_{145}^1$	
		d_{290}	K_{146}	d_{291}	$C_{146} A_{146}^1$	
		d_{292}	K_{147}	d_{293}	$C_{147} A_{147}^1$	
		d_{294}	K_{148}	d_{295}	$C_{148} A_{148}^1$	
		d_{296}	K_{149}	d_{297}	$C_{149} A_{149}^1$	
		d_{298}	K_{150}	d_{299}	$C_{150} A_{150}^1$	
		d_{300}	K_{151}	d_{301}	$C_{151} A_{151}^1$	
		d_{302}	K_{152}	d_{303}	$C_{152} A_{152}^1$	
		d_{304}	K_{153}	d_{305}	$C_{153} A_{153}^1$	
		d_{306}	K_{154}	d_{307}	$C_{154} A_{154}^1$	
		d_{308}	K_{155}	d_{309}	$C_{155} A_{155}^1$	
		d_{310}	K_{156}	d_{311}	$C_{156} A_{156}^1$	
		d_{312}	K_{157}	d_{313}	$C_{157} A_{157}^1$	
		d_{314}	K_{158}	d_{315}	$C_{158} A_{158}^1$	
		d_{316}	K_{159}	d_{317}	$C_{159} A_{159}^1$	
		d_{318}	K_{160}	d_{319}	$C_{160} A_{160}^1$	
		d_{320}	K_{161}	d_{321}	$C_{161} A_{161}^1$	
		d_{322}	K_{162}	d_{323}	$C_{162} A_{162}^1$	
		d_{324}	K_{163}	d_{325}	$C_{163} A_{163}^1$	
		d_{326}	K_{164}	d_{327}	$C_{164} A_{164}^1$	
		d_{328}	K_{165}	d_{329}	$C_{165} A_{165}^1$	
		d_{330}	K_{166}	d_{331}	$C_{166} A_{166}^1$	
		d_{332}	K_{167}	d_{333}	$C_{167} A_{167}^1$	
		d_{334}	K_{168}	d_{335}	$C_{168} A_{168}^1$	
		d_{336}	K_{169}	d_{337}		

kde $U_1(p)$, $U_2(p)$, $Z_1(p)$ a $Z_2(p)$ jsou funkce, jejichž póly známe. Obraz výstupu obdržíme jako součin obrazu vstupu a přenosu $D(p)$. Po dosazení vztahů (12) do výrazů pro přenos obvodu (11) a jednoduché úpravě obdržíme

$$\begin{aligned} V(p) &= D(p) X(p) = \\ &= \frac{e^{-sT_1} [U_1(p) + U_2(p) Z_2(p)] X(p)}{1 + Z_1(p) + Z_2(p) + Z_1(p) Z_2(p) + e^{-sT_1} [U_2(p) + U_1(p) Z_1(p)]} = \\ &= \frac{U(p)}{1 + Z(p)}. \end{aligned}$$

Originály $u(t)$ a $z(t)$ k funkcím $U(p)$ a $Z(p)$ můžeme již snadno nalézt.

Z výrazu pro $Z(p)$ jest patrné, že funkce $z(t)$ obecně může být nespojitá jednak v počátku a jednak v čase $t = T_1$ (obr. 10). Funkce $u(t)$ a tím též $y(t)$ (plyne z rovnice (4)) může být nespojitá v čase $t = T_1$ a až do tohoto času je nulová (obr. 11).

Obr. 10.
Obr. 11.

Podrobnějším rozбором, který lze provést na př. pomocí grafického znázornění podobného obr. 3, zjistíme, že i v tomto případě lze k vyčíslení odezvy použít tabulky I, dodržíme-li těchto několik pravidel:

1. Interval Δ volíme tak, aby dopravní zpoždění bylo jeho celistvým násobkem.
2. Místo hodnoty \bar{u}_s (v místě event. nespojitosti funkce $u(t)$) dosazujeme do tabulky I hodnotu \bar{u}_{sp} (bez pruhu!).
3. Za hodnoty funkcí v místě eventuální nespojitosti $t = T_1$ dosazujeme střední hodnotu limit zleva a zprava

$$\left(\frac{y_{s1} + y_{sp}}{2} \text{ resp. } \frac{y_{sp}}{2}, \frac{z_{s1} + z_{sp}}{2} \right).$$

4. Při prvním objevení se ve výpočtu hodnoty z_s (v řádku pro $y(2T_1)$) dosazujeme za její hodnotu limitu zleva z_{s1} . (Toto pravidlo se uplatní jen pro $u_{sp} \neq 0$.) Jinak je postup týž jako v případě obvodu bez dopravního zpoždění.

Příklad 4. Vyšetřme odezvu obvodu na obr. 12 na jednotkový skok vstupu. Týž případ je řešen v lit. [2] přes frekvenční charakteristiku.

Celkový přenos obvodu je

$$D(p) = \frac{\frac{e^{-sT_1}}{1 + pT_1}}{1 + e^{-sT_1} \frac{k}{1 + pT_1}}.$$

Obr. 12.

Konstanty obvodu jsou

$$T_1 = 2sT_1 = 10 \text{ s}, \quad k = 6,0.$$

Obraz hledané odezvy bude tedy:

$$Yp = \frac{\frac{e^{-sT_1}}{p(1 + 10p)}}{1 + e^{-sT_1} \frac{6}{1 + 10p}} = \frac{Up}{1 + Zp}.$$

Originály k funkcím $U(p)$ a $Z(p)$

$$u(t) = 1 - e^{-\frac{t-2}{10}} \text{ pro } t > 2 \text{ s}; \quad u(t) = 0 \text{ pro } t < 2 \text{ s}$$

$$z(t) = 0,6 e^{-\frac{t-2}{10}} \text{ pro } t > 2 \text{ s}; \quad z(t) = 0 \text{ pro } t < 2 \text{ s}$$

snadno vyčísíme pomocí tabulek e^x . Interval volíme $\Delta = 1 \text{ s}$. Dosazením do tabulky I při zachování výše uvedených pravidel obdržíme:

0,181	0	1,010	4,280	5,164	3,801	1,021	-1,852	-3,595	-5,618	-2,114	0,096
0,454	0										
0,657	1,010	0									
0,785	4,539	0	-0,268								
0,801	6,574	0	-0,751	-0,688							
0,798	7,663	0	-1,058	-1,943	-0,830						
0,772	8,014	0	-1,229	-2,813	-2,338	-0,612					
0,733	7,985	0	-1,291	-3,266	-3,388	-1,728	-0,104				
0,688	7,718	0	-1,288	-3,430	-3,934	-2,409	-0,403	+0,298			
0,641	7,825	0	-1,243	-3,416	-4,130	-2,901	-0,671	+0,841	+0,579		
6,876	0	-1,180	-5,902	-4,114	-3,047	-0,779	+1,217	+1,652	+0,583		
6,409	0	-1,107	-5,135	-5,977	-3,035	-0,818	+1,413	+2,365	+1,642	+0,340	

Získaný průběh odezvy je vyneseno do grafů na obr. 13 (str. 24). Hodnoty odezvy námi získané jsou označeny křížky. Hodnoty převzaté z literatury [8] jsou označeny čtverečky. Z porovnání obou výpočtů je patrná rychlost popsané metody. Přesné řešení úlohy známo není.

8.4. Výpočet odezvy uzavřené smyčky ze známé odezvy otevřené smyčky

Mezi klasické problémy teorie regulace patří stanovení odezvy uzavřené smyčky, je-li známa odezva otevřené smyčky. Ukážeme si, jak jednoduše lze řešit tuto úlohu pomocí popsané metody.

Vztah mezi přenosem uzavřené smyčky $D(p)$ a přenosem otevřené smyčky $G(p)$ je dán známým vzorcem

$$D(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

Obraz výstupu uzavřené smyčky (obr. 14) pak je

$$Y(p) = \frac{G(p) X(p)}{1 + G(p)} \quad (13)$$

Obr. 14.

Odezva uzavřené smyčky na jednotkový impuls.

Jde-li o nalezení odezvy na jednotkový impuls, je $X(p) = 1$ a ze srovnání výrazů (13) a (1) plyne

$$U(p) = Z(p) = G(p)$$

a tudíž i

$$u(t) = z(t) = g(t),$$

kde $g(t)$ je odezva otevřené smyčky na jednotkový impuls. Hledanou odezvu nalezneme pouhým dosazením hodnot $g_k = g(k\Delta)$ do tabulky 1. Je-li známa odezva otevřené smyčky na jednotkový skok (na př. experimentálně získaná), je ji třeba nejprve derivovat (numericky, graficky nebo graficko-mechanicky).*)

*) Požadavky na přesnost derivace nejsou velké. Viz př. 6.

Obr. 15.

Obr. 16.

Odezva uzavřené smyčky na jednotkový skok.

V případě odezvy uzavřené smyčky na jednotkový skok $X(p) = \frac{1}{p}$ a podle (13) a (1)

$$U(p) = \frac{1}{p} G(p),$$

$$Z(p) = G(p).$$

Označíme-li odezvu na jednotkový impuls otevřené smyčky $g(t)$ a odezvu otevřené smyčky na jednotkový skok $g_1(t)$, bude

$$u(t) = g_1(t) = g(t) \, dt,$$

$$z(t) = g(t) = g'_1(t).$$

Známe-li odezvu otevřené smyčky na jednotkový impuls, musíme ji integrovat, abychom získali potřebné hodnoty $u(t)$ pro dosazení do tabulky 1. Naopak, známe-li odezvu otevřené smyčky na jednotkový skok, musíme ji derivovat, abychom získali potřebné hodnoty $z(t)$.

Příklad 5. Jako příklad uvedeme nalezení odezvy regulačního obvodu na obr. 15 na jednotkový impuls. Řešení tohoto případu jinými metodami je uvedeno v literatuře [9].

Obr. 15.

Otevřenou smyčku tvoří seriové spojení pěti aperiodických článků s časovými konstantami

$$T_1 = 1,2 \, s; \quad T_2 = 0,2 \, s; \quad T_3 = 0,01 \, s; \quad T_4 = 0,01 \, s; \quad T_5 = 0,07 \, s.$$

Celkový zisk otevřené smyčky je 14. Přenos otevřené smyčky je podle toho

$$G(p) = \frac{14}{(1 + 1,2p)(1 + 0,2p)(1 + 0,01p)(1 + 0,07p)}$$

Póly přenosu jsou patrné, a proto odezvu otevřené smyčky na jednotkový impuls snadno vypočteme. Mohla by též být naměřena nebo získána derivací odezvy na jednotkový skok. Její hodnoty po intervalech $\Delta = 0,1 \, s$ jsou:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_k	0	1,610	4,639	6,674	7,632	8,014	7,983	7,716	7,325	6,876	6,409

Protože $g(0) = 0$, platí $u = 1$, $u_k = g_k$, $z_k = 0,01 g_k$. Po dosazení do tabulky 1 obdržíme:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
0,003	0				0,095	0,181	0,230	0,224	0,179	0,128	0,095	0,105
0,043	0											
0,491	0											
0,445	0,095			0								
0,402	0,181			0								
0,364	0,230			0								
	0,330			0	-0,028	0						
	0,293			0	-0,052	-0,054	0					
	0,451			0	-0,047	-0,098	-0,099	0				
	0,503			0	-0,042	-0,089	-0,125	-0,057	0	-0,054		
	0,551			0	-0,038	-0,081	-0,113	-0,122	-0,054	0		
				0	-0,035	-0,066	-0,102	-0,110	-0,097	-0,038	0	

Získaná odezva uzavřené smyčky je vynesena do grafu na obr. 16 (viz str. 24). Pro porovnání jsou uvedeny i hodnoty (také jen přibližné) převzaté z lit. [3]; jsou označeny čtverečky.

8.5. Výpočet odezvy regulačního obvodu z daných přechodových charakteristik regulované soustavy a regulátoru

Uvažujme regulační obvod na obr. 17, kde $S(p)$ jest přenos regulované soustavy a $Z(p)$ je přenos regulátoru. Porucha nechť působí v obecném místě regu-

Obr. 17.

Obr. 18.

lované soustavy. Podle zákona superposice, který platí pro lineární soustavy lze obvod překreslit do tvaru na obr. 18, kde $S^*(p)$ je přenos regulované soustavy od místa poruchy k jejímu výstupu. Pro obraz výstupu pak platí

$$Y(p) = \frac{S^*(p) X(p)}{1 + S(p) Z(p)} \quad (14)$$

Předpokládejme, že jsou známy odezvy soustavy (i její části S^*) a regulátoru na jednotkový impuls $[e(t), s^*(t), r(t)]$. Získali jsme je experimentálně přímo nebo derivací odezvy na jednotkový skok. Z porovnání výrazu pro obraz výstupu (13) a výrazu (1) plyne

$$U(p) = S^*(p) X(p),$$

$$Z(p) = S(p) R(p).$$

Budeme-li znát originály k těmto funkcím $u(t)$ a $z(t)$, staží k nalezení odezvy obvodu dosadit do tabulky 1. Hledáme-li odezvu na jednotkový impuls (skok), je $u(t)$ shodné s odezvou na jednotkový impuls (skok) části regulované soustavy mezi místem poruchy a výstupem. $z(t)$ je dáno konvolutorním integrálem

$$z(t) = \int_0^t s(t-\tau) r(\tau) d\tau, \quad (15)$$

který můžeme vyčíslit pomocí přibližného výrazu

$$z_k = a_k \left(\frac{s_0}{2} r_k - s_k \frac{r_0}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} s_{k-i} r_i \right) \Delta.$$

Jeho vyčíslení pro různé hodnoty k můžeme upravit do tabulky 2 podobné tabulce 1. Při tom násobení hodnotou Δ provádíme až před dosazením do tabulky 1, abychom ušetřili jednu operaci. Pak bude

$$\bar{z}_k = z_k \Delta = \bar{z}_k \Delta^2.$$

Tabulka II

$\frac{r_0}{2}$	$\frac{s_0}{2}$	s_1	s_2	s_3	s_4	...
r_1	0					\bar{z}_0
r_2	$\frac{s_0}{2} r_1$	$s_1 \frac{r_0}{2}$				\bar{z}_1
r_3	$\frac{s_0}{2} r_2$	$s_1 r_1$	$s_2 \frac{r_0}{2}$			\bar{z}_2
r_4	$\frac{s_0}{2} r_3$	$s_1 r_2$	$s_2 r_1$	$s_3 \frac{r_0}{2}$		\bar{z}_3
r_5	$\frac{s_0}{2} r_4$	$s_1 r_3$	$s_2 r_2$	$s_3 r_1$	$s_4 \frac{r_0}{2}$	\bar{z}_4

Příklad 3. Stavající objekt má být opatřen samostatnou regulací. Odeava soustavy, jež má být regulována, na jednotkový skok na jejím vstupu byla vyšetřena experimentálně a je uvedena na obr. 19 (křivka $s_1(t)$). Zájemná odeava soustavy s připojeným regulátorem podle obr. 20 na jednotkový skok na vstupu regulované soustavy. Odeava regulátoru na jednotkový skok je rovněž na obr. 19 (křivka $s_2(t)$).

Podle předchozího platí $u(t) = s_1(t)$. Pro výpočet potřebných hodnot s musíme nejprve odezvy $s_1(t)$ a $r_1(t)$ derivovat, abychom dostali $s(t)$ a $r(t)$, které pak dosadíme do tabulky 2. Požadavky na přesnost derivace nejsou velké. Provádíme ji numericky. Vytáhneme s prvním přiblížením, podle kterého je hodnota derivace funkce $f(t)$ v čase $t = k\Delta$

$$f'_k = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2\Delta}$$

Výpočet podle této formule postupuje velmi rychle. Interval Δ volíme tak, aby řada hodnot f dobře nahrazovala průběh funkce $f(t)$. V našem případě volíme interval Δ ohledem na průběh $s_1(t)$ 0,25 s. Tak obdržíme (uvedeme výpočet prvních deseti hodnot hledané odezvy)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_{1k}	0	0,015	0,049	0,095	0,155	0,217	0,279	0,340	0,399	0,455	0,509
s_{2k}	0,000	0,008	0,166	0,212	0,238	0,248	0,246	0,240	0,230	0,220	0,208
r_{1k}	0	2,31	3,03	3,32	3,44	3,47	3,49	3,5	3,5	3,5	3,5
r_{2k}	5,85	6,08	2,22	0,52	0,30	0,10	0,06	0,03	0,00	0,00	0,00

Hodnoty s_k a r_k dosadíme do tabulky 2.

	4,425	0,030	0,098	0,166	0,212	0,238	0,248	0,246	0,240	0,230	0,220	0,208
4,425	0											0
0,030	0	0,155										0,017
0,098	0,008	0,395	0,735									1,397
0,166	0,025	0,218	1,005	0,639								2,187
0,212	0,008	0,080	0,369	1,285	1,053							2,798
0,238	0,003	0,029	0,138	0,471	1,445	1,098						3,180
0,248	0,002	0,010	0,050	0,174	0,528	1,502	1,088					3,354
0,246	0,001	0,005	0,017	0,064	0,195	0,551	1,490	1,062				3,395
0,240	—	—	0,002	0,010	0,021	0,071	0,204	0,546	1,455	1,018		3,327
0,230	—	—	—	0,003	0,013	0,024	0,074	0,202	0,535	1,394	0,974	3,217
0,220	—	—	—	—	0,004	0,014	0,025	0,074	0,197	0,511	1,383	3,070

*) Za derivaci v počátku vezmeme přibližnou hodnotu $f'_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{\Delta}$.

Hledanou odezvu získáme dosazením hodnot $\bar{u}_k = s_k \Delta = 0,0625 s_k$ do tabulky 1

	0,009	0	0,015	0,048	0,094	0,145	0,193	0,234	0,265	0,294	0,319	0,336
0,009	0											
0,067	0											
0,137	0,015	0										
0,170	0,048	0	-0,001									
0,199	0,094	0	-0,002	-0,002								
0,210	0,145	0	-0,002	-0,004	-0,004							
0,213	0,193	0	-0,003	-0,007	-0,008	-0,008						
0,208	0,234	0	-0,003	-0,008	-0,013	-0,013	-0,008					
0,201	0,265	0	-0,003	-0,010	-0,016	-0,020	-0,017	-0,008				
0,192	0,294	0	-0,003	-0,010	-0,019	-0,025	-0,026	-0,020	-0,010			
0,180	0,319	0	-0,003	-0,010	-0,020	-0,029	-0,034	-0,032	-0,023	-0,011		
0,165	0,336	0	-0,003	-0,010	-0,020	-0,030	-0,038	-0,041	-0,036	-0,025	-0,011	

Příklad byl zvolen tak, aby bylo možno nalést i přesné řešení, které představuje křivka na obr. 21. Křivky jsou označeny hodnoty námi získané.

8.6. Závěr

V článku je popsána jednoduchá numerická metoda pro výpočet odezvy lineárních regulačních obvodů. Uvedená metoda umožňuje rychlý výpočet odezvy regulačního obvodu soustavy, je-li známa soustava diferenciálních rovnic popisujících chování jejich jednotlivých článků, resp. je-li znám celkový přenos obvodu v operátorovém tvaru. Umožňuje též jednoduše vyšetřit odezvu uzavřené smyčky, je-li známa odezva otevřené smyčky, a odezvu regulačního obvodu, jsou-li známy (na př. experimentálně zjištěny) přechodové charakteristiky regulované soustavy a regulátoru.

Rychlost a jakou vede metoda k cíli je patrna z připojených příkladů. Pro posouzení přesnosti výsledků metodou dosažených jsou uvedeny i jednoduché příklady, jejichž přesné řešení lze snadno nalézt. Je z nich patrné, že metoda dává dobré výsledky i při volbě poměrně velmi hrubého intervalu Δ , při němž se počet potřebných číselných operací značně snižuje. Je pozoruhodné, že přesnosti výsledku s délkou vyčíslované odezvy neubývá.

Pro přípravu výpočtu, která odborníkovi nezabere mnoho času (úprava obrazu odezvy do tvaru (1), rozvoj pro funkce $U(p)$ a $Z(p)$ a volba intervalu Δ), může vyčíslení provádět kancelářské síla s nižší odbornou kvalifikací.

Autorovi je milou povinností poděkovat svému školiteli doc. Ing. Dr. J. Neukolnému za cenné rady, které mu poskytl během vypracování této práce.

Literatura

- [1] V. V. SOLODOVNIKOV, O primenении trapezoidalnykh častotnykh charakteristik k analizu kačestva sistem avtomatičeskogo regulirovanija, *Avtomatika i telemekhanika*, 1948, č. 4.
týž, Vvedenije v statističeskiju dinamiku sistem avtomatičeskovo upravlenija, Gosizdat techn.-teor. lit., Moskva 1952.
- [2] G. S. BROWN, D. P. CAMBELL, *Principles of Servomechanisms*, N. Y. 1948.
- [3] A. LEONHARD, *Trans. ASME*, 76 (8), 1954.
- [4] Podrobnější o vývoji těchto metod viz: Trudy vtorogo vseoznuznogo sověščanija po teorii avtomatičeskogo regulirovanija, Tom II, str. 41 AN SSSR, 1955.
- [5] A. TUSTIN, A Method of analysing the Behaviour of Linear Systems in Terms of Time Series, *Journal IEE*, IIA, 1947.
- [6] R. BOXER, S. TRALEER, A Simplified Method of Solving Linear and Nonlinear Systems, *Proc. IRE*, Jan. 1956.
- [7] Z. S. BLOCH, Integralnyje uravnenija teorii regulirovanija, Račot i analiz sistem avtomatičeskogo regulirovanija mašin (Sborník naučnych rabot), Mašgiz, Moskva 1954.
- [8] A. LEONHARD, *Trans. ASME*, 76 (8), 1954. Viz též ruský překlad ve sborníku Mašinstrojenije, 5 (23), Izd. inostr. lit., Moskva 1955.
- [9] J. BENEŠ a Z. TRNKA, Matematické a grafické metody řešení regulačních soustav. Souhrn prací o automatizaci, ČSAV, 1955.

Obr. 6.

Obr. 19.

Obr. 20.

Obr. 21.

9. ČÍSELNÝ VÝPOČET ODEZVY NELINEÁRNÍHO A ČASOVĚ PROMĚNNÉHO REGULAČNÍHO SYSTÉMU

Ing. Jiří Rípl
VČT Praha

Theoretické řešení regulačních systémů, jejichž funkce je popsána diferenciálními rovnicemi nelineárními nebo s časově proměnnými koeficienty, je stále ještě obtížné a mnohé problémy zůstávají dosud nevyřešeny. V regulační technice jde zejména o rozřešení těchto základních úloh:

- určení stability regulačního systému,
- určení časového průběhu regulačního poohodu.

Prvý problém lze řešit užitím Ljapunovských kritérií (L-9) a přibližnou linearisací výchozích rovnic. Řešení druhého problému je dáno integrálem základních diferenciálních rovnic a je známo několik způsobů počítacích, grafických i kombinovaných, které umožňují jeho výpočet. Většinou jde však o početní způsoby velmi pracné a nevhodné pro použití u rovnic nelineárních. V dalším naznačíme početní postup pro řešení regulačních problémů daných obyčejnými diferenciálními rovnicemi lineárními i nelineárními, založený na využití všech výhod symbolického operátorového počtu. Na základě toho lze pak při numerickém výpočtu používat nejjednodušších základních početních úkonů proveditelných na počítačích strojích a výpočtových tabulkách.

9.1. Operátorový počet Mikusiňského

Při teoretickém výpočtu průběhu odezvy na libovolný vstup u regulačního systému dospějeme k úloze řešit konvolutorní integrál (3) a (4) tohoto typu

$$\int_0^t y(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

kde jedna z funkcí je odezva na jednotkový impuls a druhá je daný libovolný vstup. O početní metodě k vyřešení tohoto integrálu zmínil se ve své přednášce Ing. Peterka. Výpočet odezvy se jeví ve zcela novém světle při použití Mikusiňského operátorového počtu (1), (2), neboť je mnohem obecnější a exaktnější než dosud užívaná Laplaceova transformace. Jeho předností je, že obchází celkem zbytečný postup transformace funkce, výpočet obrazu a zpětný výpočet originálu, při tom však zachovává všechny přednosti Laplaceovy integrální transformace a rovněž i její pravidla. Charakter operátorového počtu Mikusiňského je zcela algebraický a Laplaceova integrální transformace se jeví jako jeho jistý speciální případ.

Pro informaci vyslovíme v dalším výkladu pouze nejpodstatnější vlastnosti a pravidla tohoto počtu, kterých bude zapotřebí pro pochopení a objasnění použité symboliky.

Základem operátorového počtu Mikusiňského je zcela nové pojetí funkce $f(t)$ a její hodnoty v bodě t .

Hodnotou funkce $f(t)$ v bodě t je číslo $f(t)$, a není-li funkce proměnná s parametrem t , pak je číselnou konstantou.

Funkce $f(t)$ v operátorovém počtu je nutno pojímat jako množinu všech hodnot funkce $f(t)$ na intervalu $0 \leq t < \infty$, kterou označíme symbolicky $\{f(t)\}$ na rozdíl od číselné hodnoty funkce. Funkce $\{f(t)\}$ má na intervalu $0 \leq t < \infty$ hodnoty $f(t)$ a v intervalu $-\infty < t < 0$ hodnoty $f(t) = 0$.

Na př. funkce $\{1\}$ značí jednotkovou skokovou funkci (t. j. funkci, která má pro všechna záporná t hodnotu 0 a pro všechna kladná t číselnou hodnotu 1). Naproti tomu 1 je pouhé číslo, číselný operátor.

Pro takto zavedené funkce lze vybudovat algebru, která má shodná početní pravidla jako při počítání s čísly.

Součet dvou funkcí $\{f\}$ a $\{g\}$ je funkce $\{h\}$, jejíž všechny hodnoty v libovolném čase t jsou dány součtem hodnot obou funkcí v témž čase t . Platí tedy

$$\{f\} + \{g\} = \{h\} = \{f + g\}.$$

Součin dvou funkcí $\{f\}$ a $\{g\}$ nazýváme splotem nebo konvolucí a definujeme jej konvolutorním integrálem

$$\{f\}\{g\} = \left\{ \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right\}.$$

Toto jednoduché symbolické vyjádření konvolutorních integrálů je jedním z hlavních důvodů, proč užíváme tento počet. Pro součet i součin funkcí platí komutativní, asociativní a distributivní zákony obdobně jako při počítání s čísly.

Z definice splotů dále plyne

$$\{1\}\{f\} = \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}$$

a pro celé kladné číslo n

$$\{1\}^n = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\}.$$

Násobení funkce $\{f(t)\}$ číslem k je definováno jako funkce, jejíž všechny hodnoty jsou násobeny tímto číslem, čili

$$k\{f(t)\} = \{kf(t)\}.$$

Při počítání s čísly dává dělení vznik zlomků. Dělením funkcí vznikají nové útvary — operátory. Důležitým operátorem je $s = \frac{1}{\{1\}}$. Jeho vlastnost podává výpočet z rovnice

$$k\{1\} = \{k\},$$

kde k je konstanta. Po dělení rovnice jednotkovou skokovou funkcí $\{1\}$ plyne:

$$k = \frac{\{k\}}{\{1\}} = s\{k\}.$$

Skoková funkce $\{k\}$ násobená operátorem s je číselným operátorem k , tedy prostě číslem (impulsovou funkcí velikosti k). Z rovnice

$$\left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \{1\}\{f(t)\}$$

lze vypočítat $\{f(t)\}$ pomocí operátoru s takto:

$$s\left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \{f(t)\}.$$

Operátor s je operátorem inverzním k integraci, tedy operátorem derivačním.

Má-li funkce $\{a(t)\}$ derivaci a' , pak platí

$$s\{a\} = \{a'\} + a(0),$$

kde $a(0)$ je hodnota funkce $\{a(t)\}$ v čase $t = 0$.

Důkaz tohoto tvrzení obdržíme zpětnou integrací. Násobme celou rovnici $\{1\}$ a obdržíme identitu

$$\{a\} = \{1\}\{a'\} + \{a(0)\} = \left\{ \int_0^t a'(\tau) d\tau + a(0) \right\} = \{a\}.$$

Zobecněním tohoto tvrzení, které uvedeme již bez důkazu, je

Věta 1. Má-li funkce a_n -tou derivaci $a_n^{(n)}$, pak platí

$$s^n\{a\} = \{a^{(n)}\} + \sum_{i=0}^{n-1} s^i a^{(n-i-1)}(0), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

kde $a^{(n-i-1)}(0)$ jsou počáteční podmínky.

Vztah operátoru Mikusiňského k Laplaceově transformaci podává transformační theorem.

Posunutí funkce $\{f(t)\}$ ve směru osy času o míru λ určuje výraz

$$e^{-\lambda t}\{f(t)\} = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq t < \lambda, \\ f(t - \lambda) & \text{pro } 0 \leq \lambda < t. \end{cases}$$

Hodnoty funkce $f(t)$ pokládáme za číselný operátor proměnné λ čili $f(\lambda)$. Pak podle právě uvedeného transformačního theoremu je možno množinu všech hodnot $f(\lambda)$ vyjádřit jako funkci $\{f(t)\}$ ve formě součtu všech impulsů $f(\lambda)$ dle posunutých o hodnotu λ v kladném smyslu na ose času t , čili

$$f(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda.$$

Protože v zavedeném operátorovém počtu máme nenulové hodnoty funkce $\{f(t)\}$ definovány na intervalu $0 \leq t < \infty$, sečteme všechny impulsy na tomto intervalu, t. j. $0 \leq \lambda < \infty$. Tím dostaneme $\{f(t)\}$ vyjádřenou pomocí číselného operátoru $f(\lambda)$ ve tvaru

$$\{f(t)\} = \int_0^\infty f(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda = Q(s).$$

Tento integrál je formálně shodný s Laplaceovou integrální transformací, která se dříve považovala za matematický základ operátorového počtu objeveného Heavisidem [6].

Tato souvislost opravňuje též použití operátorových slovníků sestavených pro Laplaceovu transformaci v teorii operátorů Mikusiňského [6]. Z tohoto důvodu, jak se dá též přímo dokázat, operátorům $\frac{1}{s-\alpha}$ přísluší funkce $\{e^{\alpha t}\}$ čili platí

$$\frac{1}{s-\alpha} = \left\{ \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \right\}; \quad \frac{1}{(s-\alpha)^\lambda} = \left\{ \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} e^{\alpha t} \right\}, \quad (\lambda > 0).$$

Právě tak platí

$$\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} = \left\{ \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t \right\}; \quad \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} = \{e^{-\alpha t} \cos \beta t\}; \dots$$

Postup a výhody výpočtu ukážeme na příkladě jednoduché diferenciální rovnice

$$y'' + \beta^2 y = f(t).$$

Přepsáním dostáváme

$$\{y''\} + \beta^2 \{y\} = \{f(t)\}.$$

Pomocí věty 1 pro nulové počáteční podmínky $y'(0) = y(0) = 0$ platí

$$\{y\} = \frac{1}{s^2 + 1} \{f(t)\} = \frac{1}{\beta} \{\sin \beta t\} \{f(t)\}$$

čili

$$y = \frac{1}{\beta} \int_0^t \sin \beta(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Rovnici řešíme tak, že rozložíme operátorové výrazy na částečné zlomky s operátorem s , k nimž funkce známe, nebo vyhledáme v operátorovém slovníku, a provedeme konvoluci nalezených funkcí.

Není-li možno jednoduchým způsobem určit koeficienty polynomu ve jmenovateli operátorového výrazu, takže zlomek není možno rozložit v částečné zlomky, je možné přibližné řešení metodou vyčíslení konvolutorních integrálů.

Postup je obdobný metodě, o níž referoval Ing. Peterka. Na př. mějme diferenciální rovnici s konstantními koeficienty čtvrtého řádu v operátorovém tvaru

$$(s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0)\{y\} = (b_1 s + b_0)\{x\}.$$

Dělením $s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2$ celou rovnice obdržíme

$$\left(1 + \frac{c_1 s + c_0}{s^2(s^2 + c_3 s + c_2)}\right)\{y\} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2(s^2 + c_3 s + c_2)}\{x\}.$$

Položme po snadné úpravě

$$\frac{c_1 s + c_0}{s^2(s^2 + c_3 s + c_2)} = \{t\} \frac{c_1 s + c_0}{s^2 + c_3 s + c_2} = \{t\}\{g(t)\} = \{C(t)\}$$

a

$$\frac{b_1 s + b_0}{s^2(s^2 + c_3 s + c_2)} = \{B(t)\},$$

pak

$$\{y\} = -\{C(t)\}\{y\} + \{B(t)\}\{x(t)\}$$

čili

$$y = -\int_0^t C(t - \tau) y(\tau) d\tau + \int_0^t B(t - \tau) x(\tau) d\tau.$$

Rovnici lze řešit vyčíslením konvolutorního integrálu.

V dalším uvedeme větu důležitou pro řešení lineárních rovnic s proměnnými koeficienty.

Věta 2. Má-li funkce $x(t)$ spojitě všechny derivace až do n -té a funkce $a(t)$ rovněž spojitě všechny derivace až do n -té, pak platí

$$\begin{aligned} \{ax^{(n)}\} &= \sum_{k=0}^n s^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \{a^{(n-k)} x\} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^k s^k (-1)^{n-l} \binom{n-k}{l} a_{(0)}^{(n-l)} x_{(0)}^{(k-l)} \end{aligned} \quad (2)$$

pro celé $n \geq 1$.

Důkaz. Ve sčítacích indexech počátečních podmínek výrazu (2) zavedme relaci

$$l' = l - k - 1$$

a po omezení sčítacích mezí nového indexu l' a prohození sledu sečítání dostáváme vztahy (psáno symbolicky)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^k = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l'=0}^{n-k-1} = \sum_{l'=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-l'-1}.$$

Po přepsání rovnice (2) obdržíme

$$\begin{aligned} \{ax^{(n)}\} &= \sum_{k=0}^n s^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \{a^{(n-k)} x\} = \\ &= \sum_{l'=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-l'-1} s^k (-1)^{n-l'-k-1} \binom{n-k}{k} a_{(0)}^{(n-l'-k-1)} x_{(0)}^{(k)} \end{aligned} \quad (2a)$$

Rovnice (2) a (2a) jsou identické. V dalším budeme psát v rovnici (2a) místo l' pouze l .

Důkaz provedeme úplnou indukcí. Integrací per partes Laplaceova obrazu $ax^{(n+1)}$ dostáváme vztah

$$\begin{aligned} \{ax^{(n+1)}\} &= \int_0^\infty a x^{(n+1)} e^{-st} dt = a x^{(n)} e^{-st} \Big|_0^\infty - \\ &= \int_0^\infty a' x^{(n)} e^{-st} dt + s \int_0^\infty a x^{(n)} e^{-st} dt = -a_{(0)} x_{(0)}^{(n)} - \\ &= \{a' x^{(n)}\} + s \{a x^{(n)}\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Dosazením tvrzení (2a) do (3) dostáváme

$$\begin{aligned} &= -a_{(0)} x_{(0)}^{(n)} + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-l-1} s^k (-1)^{n-l-k-1} \binom{n-l}{k} a_{(0)}^{(n-l-k-1)} x_{(0)}^{(k)} - \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-l-1} s^{k+1} (-1)^{n-l-k-1} \binom{n-l}{k} a_{(0)}^{(n-l-k-1)} x_{(0)}^{(k)} - \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s^k \binom{n}{k} \{a^{(n-k)} x\} + \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s^{k+1} \binom{n}{k} \{a^{(n-k)} x\} = \\ &= -a_{(0)} x_{(0)}^{(n)} + \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-l} a_{(0)}^{(n-l)} - \sum_{l=0}^{n-1} s^l (-1)^{n-l-1} \left[\binom{n-l}{l} + \binom{n-l-1}{l} \right] a_{(0)}^{(n-l-1)} - \\ &= s^{n-1} a_{(0)} x_{(0)}^{(1)} + (-1)^{n+1} \{a^{(n+1)} x\} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k+1} s^k \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \{a^{(n-k+1)} x\} + s^{n+1} \{a x\} = \\ &= - \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^l s^k (-1)^{n-k-l} \binom{n-l}{k} a_{(0)}^{(n-k-l)} x_{(0)}^{(l)} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} s^k \binom{n+1}{k} \{a^{(n+1-k)} x\} = \{ax^{(n+1)}\}. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení (2a) a též identické tvrzení věty 2.

9.2. Numerický výpočet bodů odezvy lineární diferenciální rovnice s proměnnými koeficienty

Mějme diferenciální rovnici popisující regulační pochod otevřené smyčky ve tvaru

$$\sum_{i=0}^m a_i(t) y^{(i)} = \sum_{i=0}^m b_i(t) x^{(i)}; \quad n > m. \quad (4)$$

Koeficienty a_i, b_i jsou spojitými analytickými funkcemi času mající dle potřeby všechny derivace. Necht $a_n = 1$.

Aplikujeme na rovnici (4) operátorový počet Mikusiňského. Pak dostáváme

$$\{y^{(n)}\} + \sum_{i=0}^{n-1} \{a_i y^{(i)}\} = \sum_{i=0}^m \{b_i x^{(i)}\} \quad (5)$$

a po úpravě podle věty 1 a 2

$$\begin{aligned} s^n \{y\} = & - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^i s^k (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \{a_i^{(i-k)} y\} + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=1}^i s^k (-1)^{i-l} \binom{i+k-l}{k} a_i^{(i-l)}(0) y^{(l-k-1)}(0) + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} s^i y^{(n-i-1)}(0) + \sum_{i=0}^m \{b_i x^{(i)}\}. \end{aligned} \quad (6)$$

U dvojnásobného součtu ve výrazu (6) prohodíme pořadí sečítání podle symbolické rovnice

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^i = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1}$$

a u trojnásobného součtu počátečních podmínek podle symbolické rovnice

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=1}^i = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{i=k+1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1}.$$

Zavedme označení A_k pro funkce vystupující v rovnici (6) ve tvaru

$$A_k = \sum_{i=k}^{n-1} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} a_i^{(i-k)}(t) \quad (7)$$

a pro počáteční podmínky

$$C_{i,k} = \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{i-l} \binom{i+k-l}{k} a_i^{(i-l)}(0). \quad (7a)$$

Spojením výrazu (7) a (7a) s rovnici (6) a po úpravě obdržíme zjednodušený vztah

$$\begin{aligned} s^n \{y\} = & - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \{A_k(t) y\} + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{i=k+1}^{n-1} s^k C_{i,k} y^{(i-k-1)}(0) + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} s^i y^{(n-i-1)}(0) + \sum_{i=0}^m \{b_i x^{(i)}\}. \end{aligned} \quad (8a)$$

Násobme rovnici (8a) funkcí

$$\{1\}^n = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\}$$

(rovnici n -krát integrujeme).

Vzhledem ku vlastnostem operátoru s^i a funkce $\{1\}^i$ dostáváme

$$\begin{aligned} \{y\} = & - \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \right\} \{A_k y\} + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{i=k+1}^{n-1} C_{i,k} y^{(i-k-1)}(0) \left\{ \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \right\} + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} y^{(n-i-1)}(0) \left\{ \frac{t^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \right\} + \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\} \sum_{i=0}^m \{b_i x^{(i)}\}. \end{aligned}$$

Označme dále obecně

$$\left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\} = \{z\}, \quad \left\{ \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \right\} = \{z_k\}. \quad (9)$$

a funkcí $\{u\}$ součet všech známých funkcí času vystupujících v rovnici (8). Platí

$$\{u\} = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{i=k+1}^{n-1} C_{i,k} y^{(i-k-1)}(0) \{z_k\} + \sum_{i=0}^{n-1} y^{(n-i-1)}(0) \{z_i\} + \{z\} \sum_{i=0}^m \{b_i x^{(i)}\}. \quad (9a)$$

Spojením rovnic (9) a (9a) s rovnici (8) dostaneme zjednodušený vztah

$$\{y\} = - \sum_{k=0}^{n-1} \{z_k\} \{A_k y\} + \{u\}. \quad (10)$$

Pro číselný výpočet funkce y z rovnice (10) je třeba numericky vypočítat konvolutorní integrál pomocí diferencí Δt (viz referát Ing. Peterky). Pro x -tou hodnotu funkce y v bodě $x, \Delta t$, kterou v dalším označíme $y(x, \Delta t) = y_{(x)}$, se konvolutorní integrál určí pomocí známých (dříve vypočtených) x -hodnot funkcí $y_{(0)}, y_{(1)}, \dots, y_{(n-1)}$. Pro snadné a schematické vyčíslení zavedme hodnotu $z_{(x)}$, kterou budeme rozumět hodnotu funkce z_i v bodě $x, \Delta t$ násobenou ještě hodnotou intervalu Δt .

$$z_{(x)}(v, \Delta t) \Delta t = z_{(x,v)}. \quad (11)$$

V uvedeném speciálním případě je tedy

$$z_{(x,v)} = \frac{(v, \Delta t)^{n-1-1}}{(n-1-1)!} \Delta t. \quad (11a)$$

Rovnici (10) lze tedy upravit pro hrubý numerický výpočet do tvaru

$$y_{(n)} = u_{(n)} - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} z_{l(n)} A_{l(n)} y_{(n)} - \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} z_{l(n-k)} A_{l(n-k)} y_{(n)} - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} z_{l(n)} A_{l(n)} y_{(n)}. \quad (12)$$

Jak plyne z (11a), je v tomto případě číslo $z_{l(n)}$ o neznámé $y_{(n)}$ rozdílné od nuly pouze pro $l = n-1$ a má hodnotu

$$z_{n-1(n)} = \Delta t.$$

V rovnici (12) dostáváme tedy na pravé straně rovněž neznámou hodnotu $y_{(n)}$ ve třetím (posledním) součtu pro případ, že $l = n-1$. Pak pomocí (7) obdržíme

$$-\frac{1}{2} z_{n-1(n)} A_{n-1(n)} y_{(n)} = -\frac{1}{2} a_{n-1(n)} y_{(n)} \Delta t.$$

Poněvadž $a_{n-1(n)}$ je danou funkcí času, můžeme $y_{(n)}$ z diferenciální rovnice (12) vypočítat

$$y_{(n)} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{2} a_{n-1(n)}} \left[u_{(n)} - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} z_{l(n)} A_{l(n)} y_{(n)} - \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} z_{l(n-k)} A_{l(n-k)} y_{(n)} \right]. \quad (13)$$

Jestliže $a_{n-1} = \text{konst.}$, pak je možno zavést nové funkce $\tilde{u}_{(n)}$, $\tilde{z}_{l(n)}$ ve tvaru

$$\tilde{u}_{(n)} = \frac{u_{(n)}}{1 + \frac{\Delta t}{2} a_{n-1}}, \quad \tilde{z}_{l(n)} = \frac{z_{l(n)}}{1 + \frac{\Delta t}{2} a_{n-1}}, \quad (14)$$

takže rovnice (13) dostane tvar

$$y_{(n)} = \tilde{u}_{(n)} - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} \tilde{z}_{l(n)} A_{l(n)} y_{(n)} - \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{z}_{l(n-k)} A_{l(n-k)} y_{(n)}. \quad (15)$$

Tento vztah lze sestavit v poměrně jednoduchou výpočtovou tabulku, vhodnou pro praktický výpočet. Funkci $\tilde{u}_{(n)}$, $\tilde{z}_{l(n-k)}$ a $A_{l(n-k)}$ můžeme spočítat přímo, protože nezávisí na hodnotách $y_{(n)}$.

9.3. Zjednodušení výpočtové metody

Předpokládáme, že diferenciální rovnice (4) obsahuje vedle koeficientů proměnných s časem též konstanty c_i a d_i . Nechť tedy diferenciální rovnice zní:

$$\sum_{i=0}^n c_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} = \sum_{i=0}^m d_i x^{(i)} + \sum_{i=0}^m b_i(t) x^{(i)}, \quad (16)$$

kde $c_n = 1$, a po úpravách v operátorovém tvaru

$$\sum_{i=0}^n s^i \{y\} + \sum_{i=0}^{n-1} s^i \{A_i y\} = \sum_{i=0}^m d_i \{x^{(i)}\} + \sum_{i=0}^m \{b_i(t) x^{(i)}\} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^n s^k c_i y^{(i-k-1)}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} s^k C_{i,k} y^{(i-k-1)}(0). \quad (17)$$

Předpokládáme, že dovedeme určit funkci příslušející operátoru

$$\frac{1}{\sum_{i=0}^n c_i s^i} = \{\eta(t)\}.$$

V případě, že to není možné, vybereme alespoň vhodný, pokud možno co nejvyšší počet konstantních koeficientů u nejvyšších derivací, tvořících lineární mnohočlen $P(s)$, a určíme k nim funkci $\frac{1}{P(s)} = \{\eta(t)\}$. Chybějící lineární členy zahrneme do funkcí a_i . Způsob je obdobný uvedenému methodě řešení diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

Vynásobíme tedy celou rovnici (17) operátorem $\frac{1}{P(s)}$. Pak dostáváme

$$\{y\} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{s^i}{P(s)} \{A_i y\} = \frac{1}{P(s)} \sum_{i=0}^m d_i \{x^{(i)}\} + \frac{1}{P(s)} \sum_{i=0}^m \{b_i(t) x^{(i)}\} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{s^k}{P(s)} c_i y^{(i-k-1)}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s^k}{P(s)} C_{i,k} y^{(i-k-1)}(0). \quad (18)$$

Určíme funkce příslušející operátorům ve vzorci (18), a to za předpokladu, že dovedeme vypočítat přímo funkci $\{\eta\}$ k operátoru $\frac{1}{P(s)}$.

Označíme analogicky, jako v případě (9)

$$\frac{s^l}{P(s)} = s^l \{\eta\} = \{\eta^{(l)}\} = \{z_l\}, \quad l = 0, 1, \dots, n-1$$

(oprávnění podává věta 3 — viz v dalším) a

$$\begin{aligned} \{u\} &= \{z\} \sum_{i=0}^m \{(d_i + b_i(t)) x^{(i)}\} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^n c_i y^{(i-k-1)}(0) \{z_k\} + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} C_{i,k} y^{(i-k-1)}(0) \{z_k\} = \{z\} \sum_{i=0}^m \{(d_i + b_i(t)) x^{(i)}\} + \\ &+ y(0) \{z_{n-1}\} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} C_{i,k}^* y^{(i-k-1)}(0) \{z_k\}. \end{aligned}$$

Pak rovnice (18) je formálně shodná s rovnicí (10). Funkce $\{u\}$ a $\{z\}$ jsou však v obou rovnicích rozdílné.

$$\{y\} = - \sum_{k=0}^{n-1} \{z_k\} A_{k0} + \{u\}. \quad (19)$$

Při numerickém výpočtu rovnice (19) obdobně jako v případě rovnice (12) bude nutno znát nemulové počáteční hodnoty funkcí $\{z_k\}$. Pro další výpočet objasníme větu 3.

Věta 3. Necht polynom $P(s)$ je stupně n . Funkce

$$\{z_l(t)\} = \frac{s^l}{P(s)}, \quad l = 1, 2, \dots, n-1$$

mají pro $t = 0$ hodnoty nulové, vyjma funkce $\{z_{n-1}\}$, pro níž platí

$$z_{n-1}(0) = \text{konst} \neq 0.$$

Důkaz. Dle poznatku z operátorového počtu platí

$$\frac{s^l}{P(s)} = \{z_l(t)\}$$

tehdy, je-li polynom $P(s)$ stupně n a $l < n$. Slovy: pro každý podíl polynomů v s , pro něž číselník je nižšího stupně než jmenovatel, existuje funkce $\{z_l\}$, kterou dostaneme rozkladem zlomku v páciální zlomky, k nimž známe funkce času.

Je-li $l = n$, pak

$$\frac{s^n}{P(s)} = K + \frac{Q(s)}{P(s)} = K + \{z_n\}, \quad (20)$$

kde K je konstanta a $Q(s)$ je opět polynom nižšího stupně než $P(s)$.

Podle definice funkce $\{z_1\}$ a podle věty 1 plyne

$$\{z_l\} = s^l \{z\} = \{z^{(l)}\} + \sum_{k=0}^{l-1} s^k z_{(k)}^{(l-k-1)}.$$

Aby rovnice měla smysl, musí pro $l \neq 0$ být $z^{(l-k-1)} = 0$. Pouze pro $z_{(0)}^{(l-1)}$ může, ale nemusí být roven nule.

Tento vztah s ohledem na rovnici (20) platí až do $l = n$, při tom současně platí

$$\frac{s^n}{P(s)} = s^n \{z\} = \{z^{(n)}\} + \sum_{k=0}^{n-1} s^k z_{(k)}^{(n-k-1)} = \{z^{(n)}\} + z_{(0)}^{(n-1)}. \quad (21)$$

Z porovnání obou vyjádření (20) a (21) plyne $K = z_{(0)}^{(n-1)}$, $\{z_n\} = \{z^{(n)}\}$. Poněvadž K není nikdy rovno nule, nemůže se nule rovnět rovnat $z_{(0)}^{(n-1)} = z_{n-1}(0) \neq 0$. To dokazuje platnost věty 3.

Vztahy zjednodušíme tak, že hodnotou $z_{(0)}$ budeme opět rozumět

$$z_{(0)} = z_1(x \Delta t) \Delta t.$$

Při hrubém numerickém vyčíslení konvolutorního integrálu methodou aproximace integrálu součtem lichoběžníků dospěli jsme k vzorci (12). Z něho se zřetelem na tvrzení věty 3 plyne

$$y^{(n)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z_{n-1}(0) A_{n-1}(0)} y^{(n)} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} z_{(i)} A_{i(n-i)} y^{(i)} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} z_{(j)} A_{j(n-i)} y^{(j)}. \quad (22)$$

Poněvadž

$$A_{n-1}(0) = a_{n-1}(0)$$

a

$$a_n = 1$$

je

$$z_{n-1}(0) = \Delta t$$

a vzorec (22) je formálně zcela shodný se vzorcem (13). Je-li tedy $a_{n-1} = \text{konst}$, pak lze zavést funkce s pruhem vztahem (14), přičemž $\bar{u}_{(p)}$ i $\bar{z}_{(p)}$ budou mít jiné hodnoty. Je tedy způsob odvození vzorce (13) zcela speciálním případem odvození vzorce (22). Postup výpočtu a vlastní vyčíslení konvolutorního integrálu je schematicky znázorněno na tabulce I pro případ, že $a_{n-1} = \text{konst}$ a že lze tudíž zavést funkce s pruhem \bar{u} a \bar{z} , a na tabulce II pro případ, že $a_{n-1} \neq \text{konst}$.

Tabulky III, IV a V jsou pomocné pro schematické vyčíslení hodnot funkcí, vystupujících na tabulce I a II.

9.4. Postup výpočtu integrálu lineární diferenciální rovnice s proměnnými koeficienty

a) Zvolíme diferenciální krok Δt a počet intervalů q integrálů, t. j. celkovou dobu $T = q \Delta t$.

b) Provedeme výpočet pomocných hodnot pro tabulku I nebo II.

a) Určíme nejprve funkce $\{y_i\}$, $\{z_i\}$, $i = 1$ krát ji derivujeme a vepíšeme do tabulky III. Vypočítáme hodnoty jednotlivých derivací v bodech $0, \Delta t$, až $q \Delta t$, násobíme je Δt a vepíšeme do příslušných sloupců. Tím jsme spočítali hodnoty $z_{(p)}$. Tuto tabulku přeneseme do levé části tabulky II. Je-li $a_{n-1} = \text{konst}$, vynásobíme všechny hodnoty $z_{(p)}$ koeficientem $\frac{1}{1 + \frac{1}{2} \Delta t a_{n-1}}$ a zapíšeme do tabulky I.

β) Do tabulky IV vyneseme hodnoty koeficientů při neznámých (které v rovnici zbyly), t. j. hodnoty všech proměnných koeficientů a zbývajících konstant, které nefigurují ve funkci $\{y\}$ a jejich derivací pro hodnoty 0, Δt až $q \Delta t$ a jednotlivé sloupce příslušející těmto hodnotám se sečteme a zaneseme do tabulky I nebo II nahoru.

γ) Spočítáme v tabulce V hodnoty okrajových podmínek. Počáteční hodnoty všech koeficientů při neznámých konstantních i proměnných a jejich derivací, počínaje koeficientem a_1 , c_1 a konče koeficientem $c_n = 1$, vyneseme do tabulky V. V oddíle pro $k = 0$ budou se měnit střídavě pouze znaménka. Hodnoty prvního oddílu přeneseme do všech dalších oddílů pro $k = 1 \div n$ a postupně vynecháme vždy jeden sloupec. Hodnoty příslušné části prvního oddílu vynásobíme s předepsanými hodnotami kombinací, což půjde velmi rychle, neboť v úhlopříčkách jsou hodnoty stejné. Každý sloupec potom sečteme, čímž dostaneme C_k^* . Tyto hodnoty v každém oddílu zvlášť vynásobíme postupně odzadu s hodnotami počátečních podmínek funkce y a jejich derivací a sečteme. Tak dostaneme hodnoty V_n , které zaneseme do tabulky VI.

δ) Zintegroujeme konvolutorně funkce $\{z_0\}$ a funkce pravé strany diferenciální rovnice $\sum_{i=0}^m (d_i + b_i(t)) x^{(i)}$, spočítáme hodnoty takto získané funkce v bodech 0, Δt až $q \Delta t$ a zapíšeme postupně do levého sloupce tabulky VI. Vynásobíme hodnoty V_0, \dots, V_{n-1} se stejnohlými sloupci tabulky III a zapíšeme do stejnohlých řádků a sloupců v tabulce VI. Takto získané hodnoty v jednotlivých řádcích sečteme a tím obdržíme hodnotu funkce u_n v jednotlivých bodech. Tyto hodnoty přepíšeme do příslušného sloupce tabulky II nebo po vynásobení koeficientem $\frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{2} a_{n-1}}$ je-li $a_{n-1} = \text{konst}$ do tabulky I ($\bar{u}_{(n)}$).

Tímto jsme vypočetli všechny potřebné hodnoty pro tabulku I nebo II.

ε) Vlastní výpočet integrálu diferenciální rovnice v tabulce I (II).

α) Do tabulky zapíšeme hodnotu $y_{(0)} = u_{(0)}$ a touto hodnotou vynásobíme čísla $A_{(0)}, \dots, A_{n-1(0)}$. Takto získanými čísly vynásobíme tabulku $\bar{z}_{(0)}$ ($\bar{z}_{(0)}$) a hodnoty jednotlivých součinů zapíšeme do stejnohlých řádek a sloupců v části pod $y_{(0)}$. Postup je obdobný jako při výpočtu integrálu diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, pouze s tím rozdílem, že zde jde o více-sloupcové vynásobení. Sečteme hodnoty celého prvního řádku od svislé silné čáry, čímž získáme hodnotu $y_{(1)}$, kterou zapíšeme do vedlejšího oddílu v tabulce I (v tabulce II obdržíme sečtením řádku hodnotu $y_{(1)}$, kterou vynásobíme ještě hodnotou $\frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{2} a_{n-1(1)}}$ a zapíšeme do vedlejšího oddílu označeného $y_{(1)}$).

β) Hodnotou $y_{(1)}$ vynásobíme čísla $A_{(1)}, \dots, A_{n-1(1)}$ a takto získanými součiny vynásobíme opět tabulku $\bar{z}_{(1)}$ ($\bar{z}_{(1)}$) a výsledky zapíšeme do stejnohlých sloupců a řádek posunutých o jednu dolů. Provedeme součet druhého řádku od silné svislé čáry, čímž dostáváme hodnotu $y_{(2)}$, kterou obdobným způsobem zapíšeme do záhlaví sousedního oddílu, označeného $y_{(2)}$ v tabulce I. (V tabulce II obdržíme hodnotu $y_{(2)}$, kterou násobíme koeficientem $\frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{2} a_{n-1(2)}}$, čímž

dostáváme hodnotu integrálu $y_{(2)}$. Tento postup opakujeme pro každou x -tou hodnotu pro určení hodnoty $x + 1$.

Postup úpravy rovnice pro numerickou integraci ukážeme na příkladě lineární diferenciální rovnice s proměnnými koeficienty. Mějme rovnici:

$$y'' + (c_2 + t^2 \cos t) y' + (c_1 + 4t \cos t - 2t^2 \sin t) y' + [c_0 + (2 - t^2) \cos t - 4t \sin t] y = f(t).$$

Pro počáteční podmínky

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0$$

lze ji přepsat do operátorového tvaru pomocí tabulek IV a V. Pro funkce $a_i(t)$ platí podle tabulky IV

		$(2 - t^2) \cos t - 4t \sin t$
	$4t \cos t - 2t^2 \sin t$	$-(4 \cos t - 4t \sin t - 4t \sin t - 2t^2 \cos t)$
$t^2 \cos t$	$-2(2t \cos t + t^2 \sin t)$	$2 \cos t - 2t \sin t - 2t \sin t - t^2 \cos t$
$t^2 \cos t$	0	0

a pro počáteční hodnoty dle tabulky V

		$0 + c_1$
	$0 + c_2$	0
$c_2 = 1$	c_2	c_1
$V_0 = c_1 y(0)$		
	$0 + c_2$	
$c_2 = 1$	c_2	
$V_1 = c_2 y(0)$		
	$c_2 = 1$	
$V_2 = y(0)$		

Diferenciální rovnice bude tedy znít v operátorovém tvaru s vypočtenými hodnotami a funkcemi

$$(s^2 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0) \{y\} + s^2 \{t^2 \cos t y\} = \{f(t)\} + (c_1 + c_2 s + s^2) y(0).$$

Nalezneme funkci přibližující operátoru

$$\frac{1}{s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0} = \{z\}$$

a násobíme celou rovnici tímto operátorem. Tím dostáváme

$$\{y\} = -\{z_1\}\{t^2 \cos ty\} + \{z\}\{f(t)\} + y(0)\{c_1\{z\} + c_2\{z_1\} + \{z_2\}\},$$

kde $\{z_1\}$ a $\{z_2\}$ je prvá a druhá derivace funkce $\{z\}$, (pro níž jsou počáteční podmínky $z(0)$ a $z_1(0)$ nulové, jak tvrdí věta 3).

Tuto rovnici lze již snadno numericky integrovat použitím uvedených tabulek.

Na jednoduchém příkladě ukážeme číselný výpočet odezvy na jednotkový impuls.

Určíme odezvu na jednotkový impuls u regulačního členu, jehož funkce je popsána diferenciální rovnicí

$$y'' + \left(\frac{3}{2} - \frac{t^2}{4}\right)y = f(t) = x$$

př nulových počátečních podmínkách $y(0) = y'(0) = 0$ po jednotkovém impulsu.

V operátorovém tvaru rovnice zní

$$\left(s^2 + \frac{3}{2}\right)\{y\} - \left\{\frac{t^2}{4}y\right\} = 1.$$

z čehož

$$\{y\} = \frac{1}{s^2 + \frac{3}{2}} \left(1 + \left\{\frac{t^2}{4}y\right\}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left\{\sqrt{\frac{3}{2}}t\right\} \left(1 + \left\{\frac{t^2}{4}y\right\}\right).$$

Protože $a_1 = 0$ použijeme tabulky I, v níž bude platit pro velikost intervalu

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{6} = 0,427$$

a dále

$$\bar{x}_{(n)} = x_{(n)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(30^\circ \cdot n) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{9} \sin(30^\circ \cdot n),$$

$$A_{n(n)} = x^2 \cdot \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{6}\right)^2}{4} = x^2 \cdot 0,0456,$$

$$\bar{u}_{(n)} = u_{(n)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(30^\circ \cdot n).$$

$n = 0$	$u_{(0)} = 0$	$A_{(0)(0)} = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,175	0,408	0	0,008	0,130	0,345	0,506	0,709	0,790	0,654	0,430	
0,303	0,707	0	0,006	0,023	0,080	0,104	0,133	0,138	0,114	0,075	
0,349	0,817	0	0,005	0,009	0,039	0,060	0,080	0,085	0,065	0,035	
0,303	0,707	0	0,007	0,006	0,039	0,060	0,080	0,085	0,065	0,035	
0,175	0,408	0	0,005	0,045	0,102	0,104	0,133	0,138	0,114	0,075	
0	0	0	0,003	0,039	0,102	0,104	0,133	0,138	0,114	0,075	
-0,175	-0,408	0	0	0,023	0,102	0,208	0,279	0,275	0,198	0,075	
-0,303	-0,707	0	-0,003	0	0,060	0,130	0,208	0,275	0,198	0,075	
-0,349	-0,817	0	-0,006	-0,023	0	0,104	0,208	0,275	0,198	0,075	

9.5. Zpřesnění výpočtové metody

V mnohých případech technické praxe nepostaží vyčíslení konvolutorního integrálu metodou lichoběžníkovou a je nutno přistoupit k metodám přesnější. Zpřesnění výpočtu se dosáhne numerickou aproximací konvolutorního integrálu s větší přesností na základě Stirlingovy formule. Uvedeme zde znění tabulky pro výpočet konvolutorního integrálu pomocí pravidla Simpsonova a třiosminového, které mají přibližně stejnou přesnost [7 a 8].

Při výpočtu první hodnoty $y_{(1)}$ je nutno užít pravidla lichoběžníkového, při výpočtu druhé hodnoty (ve druhém řádku) Simpsonova, ve třetím třiosminového a dále ve všech dalších sudých řádcích Simpsonova pravidla a ve všech dalších lichých pro první tři hodnoty třiosminového a dále Simpsonova. V tabulce násobíme proto hodnotu v každém poli ještě příslušným koeficientem, udávajícím váhu jednotlivým součinitelům.

Schema výpočtové tabulky podává tabulka VII. Od řádku čtvrtého se již koeficienty pravidelně mění a koeficient pro výpočet $y_{(i)}$ z $y_{(i-1)}$ má již stálý tvar. Funkce s pruhem zde však nelze zavést. Tato tabulka je sestavena pro diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. V případě proměnných koeficientů se při zpřesnění výpočtu v tabulce II objeví v n -sloupci příslušející hodnotě $y_{(i)}$ v každém řádku koeficienty z tabulky VII pro odpovídající hodnoty $y_{(i)}$.

9.6. Numerický výpočet odezvy uzavřené smyčky

Tabulka I a II podává numerický výpočet otevřené smyčky regulační soustavy, která je popsána lineární diferenciální rovnicí s proměnnými koeficienty. Soustavu můžeme schematicky znázornit v blokovém schématu dle obr. 1.

Obr. 1.

Předpokládáme, že smyčku rozpojené soustavy uzavřeme přes lineární zesilovač o koeficientu zesílení K a hledáme, jak se změní postup výpočtu v tabulkách. V blokovém schématu dle obr. 2 jsou vlastnosti mezi vstupní

Obr. 2.

funkci x^* a výstupní y popsány diferenciální rovnicí

$$\sum_{i=0}^m a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^n b_i x^{(i)}, \quad (23)$$

kde pro vstupní funkci x^* platí

$$x^* = x - Ky. \quad (24)$$

Vztah mezi funkcí x a výstupní y uzavřené regulační smyčky bude, jak plyne z rovnice (23) a (24), pro $m < n$

$$\sum_{i=0}^m [a_i(t) + Kb_i(t)] y^{(i)} = \sum_{i=0}^n b_i x^{(i)}, \quad \left(\begin{array}{l} \text{pro } i > m \\ \text{je } b_i = 0 \end{array} \right). \quad (25)$$

Osnačme obdobně s větou 2

$$\sum_{i=0}^{m-1} [a_i(t-h) + Kb_i(t-h)] (-1)^{i-h} \binom{i}{h} = A_h^* \quad (26)$$

pak platí ve zcela stejném znění celá předchozí výpočtová metoda, a tedy i tabulky I až VII, jen s tím rozdílem, že místo A_h se vynášejí hodnoty A_h^* dané výrazem (26).

9.7. Numerický výpočet bodů odezvy regulační soustavy s nelineárními členy

Při řešení integrálu obyčejné lineární diferenciální rovnice s proměnnými koeficienty jsou funkce $A_h(t)$, resp. $A_h^*(t)$ a $n(t)$ v tabulce I až VII známy, a tedy předem vypočitatelné. Základní myšlenkou dalšího výpočtu je uvažovat nelineární diferenciální rovnici jako nehomogenní lineární, po případě s nekonstantními koeficienty, kde funkce času na pravé straně nebudou již známými explicitními funkcemi času t , avšak také známými nelineárními funkcemi hledaných proměnných a jejich derivací. Funkce času na pravé straně tedy připodobníme nelineárními funkcím hledaných proměnných.

Tím tedy převádíme nelineární diferenciální rovnice na rovnice lineární s jistými časovými funkcemi, jejichž hodnoty postupně vypočteme z hodnot hledaného integrálu a jeho derivací.

Je tedy nutno určit vždy $n+1$ hodnotu $y_{(n+1)}$ pomocí známých předchozích hodnot $y_{(n)}, \dots, y_{(1)}$ a jejich derivací a z nich hodnoty koeficientů diferenciální rovnice, jež jsou jejich funkcemi.

V dalších úvahách předpokládáme diferenciální rovnici tvaru (16) rozšířenou o nelineární člen tohoto tvaru:

$$g_\alpha(y, y', \dots, y^{(n)}; t), \quad \alpha < n,$$

kde α je řád nejvyšší derivace obsažené v nelineární funkci. O nelineární funkci $g_\alpha(y, \dots, y^{(n)}; t)$ předpokládáme, že je takovou nelineární funkci všech svých argumentů, že zaručuje splnění existenčních podmínek pro jednoznačný spojitý integrál $y(t)$ dané diferenciální rovnice na určitém časovém intervalu $0 \leq t \leq T$ při předepsaných počátečních podmínkách.

O nelineární funkci $h_\beta(x, \dots, x^{(\beta)}; t)$ předpokládáme, že pro libovolnou spojitou omezenou funkci času t ve všech svých derivacích $x, \dots, x^{(\beta)}$ je funkce $h_\beta(x, x^{(\beta)}; t)$ jednoznačnou, alespoň po částech spojitou omezenou funkcí času.

Nejdříve vyřešíme nejjednodušší případ, kdy $\lambda = 0$. Rovnice má tvar

$$\sum_{i=0}^n c_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} + g_0(y, t) = \sum_{i=0}^m d_i x^{(i)} + \sum_{i=0}^m b_i(t) x^{(i)} + h_p(x, \dots, x^{(p)}; t) \quad (27)$$

a v operátorovém tvaru (lineární členy upravíme podle vzorců, uvedených při výkladu numerického řešení lineárních diferenciálních rovnic s proměnnými koeficienty)

$$\begin{aligned} \{y\} = & - \sum_{k=0}^{n-1} \{z_k\} \{A_k y\} - \{z\} \{g_0(y, t)\} + \\ & + \{z\} \left\{ \sum_{i=0}^m (d_i + b_i(t)) x^{(i)} + h_p(x, \dots, x^{(p)}; t) \right\} + \\ & + y(0) \{z_{n-1}\} + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{i=k+1}^{n-1} C_{i,k}^n y^{(i-k-1)}(0) \{z_k\}. \end{aligned} \quad (28)$$

V případě, že rovnice (27) je řádu $n \geq 2$, pak funkce $\{z\}$ pro $t = 0$ má hodnotu nula a tím v rovnici pro výpočet hodnoty integrálu $y_{(n)}$ odpadne hodnota funkce $g_0(y, t)_{(n)}$ obsahující neznámé. Výpočet se opět velmi snadno sestaví do tabulky obdobné tabulce I a II. Oddíl v těchto tabulkách pro každou hodnotu $y_{(n)}$ se rozšíří ještě o sloupec hodnot nelineární funkce $g_0(y, t)$, jejíž hodnota se určí na základě vypočtené velikosti $y_{(n)}$ a promáknutí se se sloupcem $z_{n(n)}$. Hodnoty $u_{(n)}$ jsou rovněž zvětšeny o $\{z\} \{h_p\}_{(n)}$.

Je-li diferenciální rovnice (27) prvního řádu, komplikuje se výpočet pouze tím, že z každého součtu hodnot $y_{(n)}$ je nutno $y_{(n)}$ vypočítávat, což podle charakteru funkce g_0 může být pracnou úlohou. Postup výpočtu pro tento speciální případ objasníme na obecnějším případě.

K numerickému řešení hodnot integrálu obyčejné diferenciální rovnice, která obsahuje nelineární člen g_n na levé straně, je třeba vypočítat také všechny derivace $y^{(i)}$ až do řádu λ vystupující v této funkci. Abychom snížili řád nejvyšší derivace ve členu g_n a řešení tak usnadnili, pokusme se integrovat samotnou tuto funkci nebo některou její část. Podívejme se nalézt takový integrál, pak se rovnice upraví do operátorového tvaru podle věty 1 v případě, že neobsahuje explicitně vyjádřený čas, a podle věty 2, jestliže integrál je ještě násoben explicitní funkcí času.

Na jednoduchém příkladě ukážeme snížení nejvyšších derivací u nelineární funkce $g_n = g_2$.

Mějme funkci

$$g_2 = y''y(3y + 2c) + y''6y'(3y + c) + y'(7y' + 3y'' + 2by) + y^3.$$

Po přepsání do operátorového tvaru a postupnými běžnými úpravami dostaneme pomocí vět 1 a 2

$$\begin{aligned} \{g_2\} = & (s + s^2)(y'' + by'') + \{y''\} + \{y''\} - (1 + s^2)(y''(0) + by''(0)) - \\ & - s(3y''(0)y'(0) + 2by(0)y'(0)) - (6y(0)y''(0) + 3y'(0)y''(0) + 2by'(0) + \\ & + 2by(0)y''(0)). \end{aligned}$$

Tímto způsobem se podařilo snížit funkci $\{g_2\}$ na $\{g_1^*\}$, neboť funkce g_2 se skládá z několika totálních diferenciálů. Tímto snížením nelineární funkce se podstatně zkrátí a zjednoduší celý výpočtový postup a zvýšila přesnost výpočtové metody.

Tento postup není ovšem vždy možný a pak je nutno počítat s funkcí $\{g_n\}$ přímo.

Mějme obyčejnou nelineární diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n c_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} + g_n(y, \dots, y^{(n)}; t) = \\ = \sum_{i=0}^m d_i x^{(i)} + \sum_{i=0}^m b_i(t) x^{(i)} + h_p(x, \dots, x^{(p)}; t). \end{aligned} \quad (29)$$

V této rovnici oddělíme lineární členy s konstantními koeficienty od členů s koeficienty proměnnými a od nelineární funkce, a každou skupinu těchto členů budeme řešit rozdílným způsobem.

Přepíšeme celou rovnici do operátorového tvaru za předpokladu, že

$$\sum_{i=0}^n s^i c_i = \{z\}.$$

Pak obdržíme diferenciální rovnici podle známých úprav ve tvaru

$$\{y\} = - \sum_{k=0}^{n-1} \{z_k\} \{A_k y\} - \{z\} \{g_n\} + \{u\}, \quad (30)$$

kde

$$\begin{aligned} \{u\} = & \{z\} \left\{ \sum_{i=0}^m (d_i + b_i) x^{(i)} + h_p \right\} + y(0) \{z_{n-1}\} + \\ & + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{i=k+1}^{n-1} C_{i,k}^n y^{(i-k-1)}(0) \{z_k\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Pokusme se snížit stupeň $\{g_n\}$ nalezením úplného diferenciálu některého členu nebo skupiny členů v této funkci.

Předpokládáme, že se podaří snížit funkci g_α v rovnici (30) o stupeň ϱ , kde $0 \leq \varrho \leq \alpha$.

Nechť tedy podle věty 1 platí

$$\{g_\alpha\} = \sigma \{g_{\alpha-\varrho}^*\} + \{g_{\alpha-\varrho}^{**}\} - \sum_{i=0}^{\alpha-1} \sigma^i g_{\alpha-\varrho}^{*i-1} \quad (32)$$

Dosaďme předpokládaný vztah (32) do rovnice (30); dostaneme

$$\{y\} = - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \{z_k\} \{A_k y\} - \{z_\alpha\} \{g_{\alpha-\varrho}^*\} - \{z\} \{g_{\alpha-\varrho}^{**}\} + \{u^*\}, \quad (33)$$

kde

$$\{u^*\} = \{u\} - \sum_{i=0}^{\alpha-1} g_{\alpha-\varrho}^{*i-1} \{z_i\}. \quad (34)$$

K určení hodnot integrálů diferenciální rovnice (33) v daných intervalech Δt vyčíslením konvolutorních integrálů ve vhodných tabulkách musíme také znát hodnoty všech derivací funkce $\{y^{(\sigma)}\}$ pro $\sigma = 0$ až $\alpha - \varrho$. To znamená, že vedle výpočtu hodnot funkce $\{y\}$ vyčíslením konvolutorního integrálu je nutno ještě vypočítat obdobným způsobem hodnoty derivací, které vystupují v nelineárních funkcích.

Pro funkci $\{y^{(\sigma)}\}$ odvodíme nejrychlejší výpočtový vzorec z rovnice (33) po násobení operátorem σ . Jelikož nás zajímají jen hodnoty této funkce a nikoliv její počáteční podmínky, stačí pouze stanovit derivaci řádu σ pro všechny funkce a počáteční podmínky vyneset. Pro součiny $\sigma^i \{z_k\}$ podle věty 1 a 3 platí

$$\sigma^i \{z_k\} = \{z_{k+\sigma}\} - \sum_{j=0}^{i-1} \sigma^j z_{k+\sigma-j-1}^{(0)}.$$

Okrajové podmínky jsou nemulové jen pokud $k + \sigma - i - 1 \geq n - 1$. Z této podmínky plyne omezení sčítacích nází. Musí být $i \leq k + \sigma - n$ a počáteční podmínky funkce $\{z\}$ přicházejí tedy v úvahu jen, je-li $k + \sigma \geq n$.

Z rovnice (33) dostáváme

$$\begin{aligned} \{y^{(\sigma)}\} = & - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \{z_{k+\sigma}\} \{A_k y\} + \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{k+\sigma-n} \sigma^j z_{k+\sigma-j-1}^{(0)} \{A_k y\} - \\ & - \{z_\alpha\} \{g_{\alpha-\varrho}^{**}\} - \{z_{\alpha+\sigma}\} \{g_{\alpha-\varrho}^*\} + \{u^{(\sigma)}\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Z předpokládaných mezí pro sčítací indexy plyne

$$\varrho + \sigma \leq n - 1$$

a v součinnu $\{z_{\alpha+\sigma}\} \{g_{\alpha-\varrho}^*\}$ se okrajové podmínky nevyskytnou.

V rovnici (35) je nutno upravit členy do tvaru

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{k+\sigma-n} \sigma^j z_{k+\sigma-j-1}^{(0)} \{A_k y\} = \\ & = \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{k+\sigma-n} z_{k+\sigma-j-1}^{(0)} \left\{ \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} A_k^{(i)} y^{(i)} \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Ze součtu plyne, že $0 \leq j \leq \sigma - 1$. Jest tedy nutné znát pro určení derivace řádu σ v bodě x , t. j. $y^{(\sigma)}$ všechny derivace od nulté až po $\sigma - 1$ v bodě x .

Po dosazení výrazu (36) do rovnice (35) dostáváme konečný vzorec pro určení derivace řádu σ

$$\begin{aligned} \{y^{(\sigma)}\} = & - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \left(\{z_{k+\sigma}\} \{A_k y\} - \sum_{j=0}^{k+\sigma-n} z_{k+\sigma-j-1}^{(0)} \left\{ \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} A_k^{(i)} y^{(i)} \right\} \right) - \\ & - \{z_\alpha\} \{g_{\alpha-\varrho}^{**}\} - \{z_{\alpha+\sigma}\} \{g_{\alpha-\varrho}^*\} + \{u^{(\sigma)}\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Z výrazu (37) je zřejmé, že lze obecně řešit uvedenými metodami každý případ. Lineární členy s proměnnými koeficienty však komplikují značně výpočet derivací a schematické tabulky, nejsou již dostatečně přehledné. Sestavíme proto výpočtové tabulky v nichž nebudou lineární členy s proměnnými koeficienty vystupovat samostatně, ale budou zahrnuty do nelineární funkce g_α , jejíž řád vhodně snížíme. Tabulka respektující lineární členy vznikne samostatně vhodně upravenou kombinací tabulek II a VIII. Mějme tedy diferenciální rovnici, z které v operátorovém tvaru po úpravě vypočteme derivace $\{y^{(\sigma)}\}$ ve tvaru

$$\{y^{(\sigma)}\} = - \{z_\sigma\} \{g_{\alpha-\varrho}^{**}\} - \{z_{\sigma+\varrho}\} \{g_{\alpha-\varrho}^*\} + \{u^{(\sigma)}\}, \quad (37a)$$

kde

$$\begin{aligned} \{u^{(\sigma)}\} = & \{z_\sigma\} \left\{ \sum_{i=0}^{\alpha} (d_i + b_i) x^{(i)} + h_\sigma \right\} + \sum_{i=0}^{\alpha-1} \sum_{j=i+1}^{\alpha} c_j g^{(j-i-1)}(0) \{z_{i+\sigma}\} \\ & - \sum_{i=0}^{\sigma-1} g_{\alpha-\varrho}^{(\sigma-1-i)}(0) \{z_{i+\sigma}\}, \quad \sigma = 0, 1, \dots, \alpha - \varrho. \end{aligned} \quad (38)$$

Hodnoty integrálů se opět numericky vypočtou z rovnice (37a) pomocí intervalu Δt obdobně jako v případě lineárních rovnic, je-li $\alpha < n - 1$, jak ukazuje vzorec (39), přičemž celý výpočet lze sestavit do vhodné tabulky.

Po vyčíslení obdržíme rovnici

$$\begin{aligned} y^{(\sigma)} = & u_{(\sigma)}^{(\sigma)} - \frac{1}{2} \{z_{\sigma(\sigma)} g_{\alpha-\varrho}^{**} + z_{\sigma+\varrho(\sigma)} g_{\alpha-\varrho}^*\} - \\ & - \sum_{i=1}^{\alpha-1} \{z_{\sigma(\alpha-i)} g_{\alpha-\varrho}^{**} + z_{\sigma+\varrho(\alpha-i)} g_{\alpha-\varrho}^*\}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\sigma = 0, 1, \dots, \alpha - \varrho \quad \text{pro } \alpha < n - 1,$$

$$\sigma = 0, 1, \dots, n - 2 - \varrho \quad \text{pro } \alpha = n - 1.$$

Schematisovaný výpočet rovnice (39) je uveden na tabulce VIII. Z každé řádky vypočítáváme sečtením všech hodnot jednu derivaci a tedy postupně hodnoty $y_{(n)}^{(n-1)}, \dots, y_{(n)}^{(2)}, y_{(n)}^{(1)}$, které přepíšeme do záhlaví dalšího oddílu. Pomocí takto nalezených hodnot funkce a jejich derivací určíme příslušnou hodnotu potřebných funkcí $y_{(n)}^{(n-1)}$ a $y_{(n)}^{(n-2)}$. Hodnoty funkce $y_{(n)}^{(n)}$ vypočteme na tabulce IX.

Na tabulce VIII jsou podle rovnice (39) uvedeny dvě funkce nelineární, kterých může být ovšem i více a různého řádu.

V případě, že $n = n - 1$ je nutno vzorec (39) modifikovat pro výpočet derivace $y_{(n)}^{(n-1)}$, neboť $z_{n-1(0)} \neq 0$ (jak plyne z věty 3) a ve výpočtu se objeví hodnota nelineární funkce $y_{(n-1)}^{(n-1)}$.

Vzorec pro výpočet hodnot derivace tedy zní

$$y_{(n)}^{(n-1)} = y_{(n-1)}^{(n-1)} = \frac{1}{2}(z_{n-1(0)} y_{(n-1)}^{(n-1)} + z_{n-1(0)} y_{(n-1)}^{(n-1)}) + \dots + \sum_{k=1}^{n-1} (z_{n-1(0)} y_{(n-1)}^{(k)} + z_{n-1(0)} y_{(n-1)}^{(k)}) = \frac{1}{2} z_{n-1(0)} y_{(n-1)}^{(n-1)} + \dots \quad (39')$$

Jestliže nelineární funkce $y_{(n-1)}^{(n-1)}$ je ve své nejvyšší derivaci, t. j. v proměnné $y_{(n-1)}^{(n-1)}$ lineární, pak se dá hodnota $y_{(n-1)}^{(n-1)}$ z rovnice (39a) vypočítat přímo, neboť jsou známy hodnoty všech ostatních proměnných v nelineární funkci. Můžeme určit hodnotu

$$y_{(n-1)}^{(n-1)} = \frac{y_{(n-1)}^{(n-1)}}{y_{(n-1)}^{(n-1)}}.$$

Pak

$$y_{(n)}^{(n-1)} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{2} (y_{(n)}^{(n-1)})} \left[y_{(n)}^{(n-1)} + \frac{1}{2} (z_{n-1(0)} y_{(n-1)}^{(n-1)} + z_{n-1(0)} y_{(n-1)}^{(n-1)}) + \dots + \sum_{k=1}^{n-1} (z_{n-1(0)} y_{(n-1)}^{(k)} + z_{n-1(0)} y_{(n-1)}^{(k)}) \right] = \dots \quad (41)$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{2} (y_{(n)}^{(n-1)})} \text{ krát součet řádky označené (*) na tabulce VIII).}$$

Je-li však funkce $y_{(n-1)}^{(n-1)}$ závislá na své nejvyšší derivaci $y_{(n-1)}^{(n-1)}$ nelineárně, buď ve tvaru polynomu nebo nějaké transcendentní funkce, je nutno vypočítat hodnotu této derivace nějakou aproximační metodou. Na př. dosadíme do funkce $y_{(n-1)}^{(n-1)}$ hodnotu $y_{(n-1)}^{(n-1)}$ a sečtením řádky na tabulce VIII určíme novou aproximační hodnotu $y_{(n-1)}^{(n-1)}$. Tuto novou aproximaci dosadíme do funkce $y_{(n-1)}^{(n-1)}$ a sečtením hodnot tohoto řádku (!*) na tabulce VIII určíme prvou aproximaci a postup můžeme opakovat až na libovolnou přesnost.

Předpokládáme, že pravá strana je lineární funkcí x a derivací $x^{(1)}$. V tomto případě lze počítat i s impulsovými funkcemi. Impulsová funkce zavedená na vstup příslušného regulačního prvku změnil okamžitě počáteční hodnoty $y(0), \dots, y^{(n)}(0)$ a tudíž též $g(0)$, s nimiž je nutno ve výpočtové tabulce VIII při vyřizování rovnice (39) počítat.

Tyto nulové hodnoty po impulsu vypočítáme tak, že v rov. (30) a (35) nahradíme t limitovat zprava k nule $t \rightarrow +0$ a z takto získaných rovnic určíme potřebné nulové hodnoty.

Jako příklad vypočteme numericky odezvu na impuls $\{f(x)\} = 2$ u nelineárního regulačního prvku, který je popsán diferenciální rovnicí

$$y'' + y' + 2(y + y^2) = f(x)$$

při nulových počátečních podmínkách $y(0) = y'(0) = 0$.

Rovnice přepsána do operátorového tvaru zní

$$s^2\{y\} + s\{y\} + 2\{y\} + 2\{y^2\} = 2.$$

*) Jako funkci $\{z\}$ volíme nejjednodušší funkci příslušející operátoru $\frac{1}{s^2} = \{t\}$

Pak

$$\{y\} = 2\{t\} - \frac{2t+1}{s}\{y\} - \frac{t}{s}\{2y^2\}$$

$$\{u\} \quad \{z_{lin}\} \quad \{z_{nlin}\}$$

Nelineární funkce g_0 je řádu 0 a není třeba ani počítat derivace. Funkce $\{z\}$ jsou v našem případě dvě, jedna pro lineární funkci $\{y\}$, kterou označíme $\{z_{lin}\}$, a jedna pro nelineární funkci $\{2y^2\}$ označenou $\{z_{nlin}\}$. Poněvadž pro nulovou

hodnotu $z_{lin}(0) = 1$ zavedeme funkce s pruhem ve tvaru $\tilde{z} = \frac{z}{1 + \frac{\Delta t}{2} \tilde{u}} = \frac{z}{1 + \frac{\Delta t}{2}}$

Interval Δt volíme 0,33. Hrubý výpočet je proveden na tabulce X a hodnoty vyneseny na obr. 3 (křivka α).

β) Za funkci $\{z\}$ volíme

$$\{z\} = \frac{1}{s^2 + s + 2} = \frac{1}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \{e^{-\frac{1}{2}t} \sqrt{\frac{3}{4}} \sin \sqrt{\frac{3}{4}} t\}$$

tedy

$$\{y\} = 2\{z\} - \{z\}\{2y^2\}$$

a volíme stejný interval Δt . Výpočet je proveden na tabulce XI a křivka vynesena rovněž na obr. 3 (křivka β).

9.8. Regulační obvod uzavřené smyčky s nelineárním členem

Předpokládejme opět regulační obvod otevřené smyčky s nelineárním členem, jehož funkce je popsána nelineární diferenciální rovnicí. Jest určíti rovnici této obvodu, jestliže smyčku uzavřeme podle obr. 2, a to pro několik různých případů.

α) *Nelineární diferenciální rovnice (27) má lineární pravou stranu.* V diferenciální rovnici tvaru

$$\sum_{i=0}^m c_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} + g(y, y', \dots, y_x^{(n)}) = \sum_{i=0}^m b_i(t) x^{*(i)} + \sum_{i=0}^m d_i x^{*(i)}, \quad (41)$$

je možno zavést zpětnou vazbu vztahem (24). Pro $m < n$ rovnice (41) po dosazení (24) zní

$$\sum_{i=0}^n (c_i + a_i(t) + K d_i + K b_i(t)) y^{(i)} + g_x = \sum_{i=0}^m b_i x^{*(i)} + \sum_{i=0}^m d_i x^{*(i)}. \quad (41a)$$

Rovnice popisuje přenos uzavřené smyčky. Zecla obdobně jako u obvodu s uzavřenou smyčkou, popsáno lineární diferenciální rovnicí s proměnnými koeficienty, změní se pouze koeficienty lineárních členů levé strany. Tento případ lze dále dobře řešit.

β) *Diferenciální rovnice (24) má pravou stranu nelineární.* Zavedením zpětné vazby vztahem (24) stane se vlivem nelinearity na vstupu rovnice na levé straně nelineární funkcí argumentů y, y', \dots a x, x', \dots čili bude záviset také na vstupní funkci a jejích derivacích.

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} + \Phi(y, y', \dots, y^{(n-1)}, x, x', \dots, x^{(m)}; t) = \varphi(x, \dots, x^{(m)}). \quad (42)$$

Rovnici (42) je nutno řešit případ od případu podle zadané vstupní funkce zvlášť. Vzhledem k závislosti funkce Φ rovněž na vstupních funkcích je regulační prvek popsán rovnicí (42) velmi nevhodný.

γ) *Lineární regulační prvek má nelineární zesilovač ve zpětnovazební smyčce.* Necht přenos lineárního regulačního prvku je popsán diferenciální rovnicí

$$\sum_{i=0}^n c_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^m d_i x^{(i)}; \quad m < n, \quad (43)$$

k němuž připojíme zpětnovazebně nelineární zesilovač (viz obr. 2) o charakteristice

$$\eta = K_1 \xi + K_2 \xi^2. \quad (44)$$

Na vstupu regulačního prvku působí jednak vstup do uzavřené smyčky x , jednak nelineárně zesílená zpětná vazba, kterou popisuje rovnice (44) čili funkce (45)

$$x^* = x - \eta = x - K_1 \xi - K_2 \xi^2 = x - K_1 y - K_2 y^2. \quad (45)$$

Dosazením rovnice (45) do (43) dostaneme diferenciální rovnici uzavřené smyčky ve tvaru

$$\sum_{i=0}^n c_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^m K_1 d_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^m K_2 d_i (y^{(i)})^2 = \sum_{i=0}^m d_i x^{(i)} \quad (46)$$

čili nelineární rovnici, kterou lze řešit operátorovými metodami. V operátorech Mikusiňského dostane rovnice (46) tvar

$$\sum_{i=0}^n (c_i + K_1 d_i) s^i \{y\} + \sum_{i=0}^m K_2 d_i s^i \{y^2\} = \sum_{i=0}^m d_i s^i \{x\} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m (c_i + K_1 d_i) s^i y_{(0)}^{(i-1)} + \dots + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m K_2 d_i s^i (y_{(0)}^{(i-1)})^2. \quad (47)$$

Necht funkce $\{z\}$ přísluší operátoru

$$\{z\} = \left[\sum_{i=0}^n (c_i + K_1 d_i) s^i \right]^{-1},$$

pak

$$\{y\} = K_2 \sum_{i=0}^m d_i \{z\} \{y^2\} + \{z\} \{x\}, \quad (48)$$

kde

$$\{u\} = \{z\} \sum_{i=0}^m d_i \{x^{(i)}\} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m (c_i + K_1 d_i) y_{(0)}^{(i-1)} \{z\} + + K_2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m d_i (y_{(0)}^{(i-1)})^2 \{z\}.$$

Rovnice číslo (48) se opět řeší pomocí tabulky VIII.

8a

9.9. Závěr

Numerická metoda, uvedená v práci, umožňuje výpočet integrálu obyčejných diferenciálních lineárních rovnic s konstantními a časově proměnnými koeficienty a diferenciálních rovnic nelineárních. Má význam zejména pro řešení regulačních obvodů a jiných úloh z oboru regulační techniky. Výpočet integrálů rovnic je podán obecně a pro numerický výpočet speciálních případů jsou vypracovány tabulky, umožňující řešení s použitím nejelementárnější znalosti. Výsledky výpočtů jsou zatíženy chybou. Její přesné určení bude vyžadovat ještě další podrobnou analýzu. Pro technickou praxi, kde potřebujeme řešit uvedené rovnice jednoduchým a rychlým způsobem, bude přesnost výpočtové metody ve většině případů postačující. Článek budí námětem pro další theoretický a experimentální výzkum.

Literatura

- [1] J. MIKUSIŃSKY, Rachunek operatorów, Warszawa 1953.
- [2] V. DOLEŽAL: Kurzweil: Mikusińskiho operatorový počet; Slaboproudý obvod č. 11, 1953.
- [3] M. ŠALAMON, Laplaceova a Laplaceova-Wagnerova transformace, Spuška před o automatizaci, Praha 1955.
- [4] K. W. WAGNER, Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation, Leipzig 1950.
- [5] B. VAN DER POL, H. BREMMER, Operational Calculus Based on the Two-sided Laplace Integral, Cambridge 1950 — ruský překlad 1952.
- [6] V. A. DITKIN, P. I. KUZNEČOV, Příručka operatorového počtu, Praha 1954.
- [7] L. COLLATZ, Numerische Behandlung von Differenzialgleichungen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951 — ruský překlad Moskva 1953.
- [8] A. N. KRYLOV, Lekce o přibližných výčísleních, Moskva-Leningrad 1950.
- [9] A. M. LETOV, Ustojivost nelinejnych regulirajemych sistem, Moskva 1955.
- [10] V. V. ŠTŘEPANOV, Kurs diferenciálních rovnic (český překlad z ruštiny), Praha 1950.

	0	1	2	3	4	5
$g_{00} = 0$	0,74624	0,80653	0,74794	0,49150	0,19416	
$f_{00} = 0$	0,32596	1,01930	0,83680	0,23740	0,01483	
z	u	$f_{01} = 0$				
0,09103	0,54624	0				
0,13936	0,83621	0	-0,02967			
0,14813	0,88877	0	-0,04542	-0,09551		
0,12702	0,76218	0	-0,04928	-0,14623	-0,07617	
0,08819	0,52921	0	-0,04140	-0,15443	-0,11661	
0,04607	0,23445	0	-0,02874	-0,13327	-0,12395	-0,03303
0,02559	0,02559	0	-0,01436	-0,09253	-0,10629	-0,03516
-0,02502	-0,15017	0	-0,00129	-0,04624	-0,07379	-0,05093
-0,04138	-0,24331	0	0,00815	-0,00448	-0,03151	-0,00216
-0,04545	-0,27274	0	+0,01181	0,02625	-0,00357	-0,00185
-0,05989	-0,23936	0	+0,01348	+0,04342	+0,02903	-0,00101
-0,02852	-0,17115	0	+0,01300	+0,04769	+0,03462	+0,00593
						-0,00006

6	7	8	9	10	11	12
-0,03502	-0,02246	-0,30180	-0,20909	-0,23256	-0,14130	-0,04990
-0,00634	-0,02246	-0,05496	-0,05120	-0,02514	-0,00504	
+0,00003						
+0,00004	+0,00206					
+0,00016	+0,00315	+0,00500				
+0,00004	+0,00323	+0,00765	+0,00472			
+0,00003	+0,00287	+0,00814	+0,00723	+0,00228		
+0,00001	+0,00199	+0,00928	+0,00708	+0,00350	+0,00051	

[illegible]

Tabulka IV

$\bar{\psi}_0(x) = \bar{\psi}(x)$	$\bar{\psi}_1(x)$	$\bar{\psi}_2(x)$...	$\bar{\psi}_{n-1}(x)$	
η	η'	η''	...	$\eta^{(n-1)}$	
$\bar{\psi}(x) = \eta \bar{\psi}_0^{(1)} A t$	$\bar{\psi}_0$	$\bar{\psi}_1(x)$	$\bar{\psi}_2(x)$...	$\bar{\psi}_{n-1}(x)$
$\bar{\psi}(x) = \eta \bar{\psi}_1^{(1)} A t$	$\bar{\psi}_1$	$\bar{\psi}_{11}$	$\bar{\psi}_{111}$...	$\bar{\psi}_{1(n-1)}$
$\bar{\psi}(x) = \eta \bar{\psi}_2^{(1)} A t$	$\bar{\psi}_2$	$\bar{\psi}_{22}$	$\bar{\psi}_{211}$...	$\bar{\psi}_{2(n-1)}$

Tabulka IV

						$a_0(x)$
					$a_1(x)$	$-a_1'(x)$
				a_2	$-2a_2'(x)$	$a_2''(x)$
		$a_3(x)$	$-3a_3'(x)$	$3a_3''(x)$	$-a_3'''(x)$	

$a_{n-1}(x)$...	$\pm \binom{n-1}{3} a_{n-1}^{(n-4)}$	$\mp \binom{n-1}{2} a_{n-1}^{(n-3)}$	$\pm \binom{n-1}{1} a_{n-1}^{(n-2)}$	$\mp a_{n-1}^{(n-1)}$	$\mp a_{n-1}^{(n-1)}$
$a_{n-1}(x)$...	$A_{n-1}(x)$	$A_n(x)$	$A_1(x)$	$A_2(x)$	

Tabulka V

				$\left(\frac{k}{k}\right) a_{k+1}(0) + c_{k+1}$
			$\left(\frac{k}{k}\right) a_{n-1}(0) + c_{n-1}$...	$(n-4) \left(\frac{n-4-k}{n-k}\right) a_{n-4-k}(0) + c_{n-4-k}$	$\left(\frac{k}{k}\right) a_{k+1}(0) + c_{k+1}$
		$\left(\frac{k}{k}\right) a_{n-1}(0) + c_{n-1}$	$\left(\frac{k+1}{k+1}\right) a'_{n-2}(0)$...	$(n-3) \left(\frac{n-3-k}{n-k}\right) a_{n-3-k}(0) + c_{n-3-k}$	$\left(\frac{k}{k}\right) a_{k+1}(0) + c_{k+1}$
	$\left(\frac{k}{k}\right) a_{n-1}(0) + c_{n-1}$	$\left(\frac{k+1}{k+1}\right) a'_{n-1}(0)$	$\left(\frac{k+2}{k+2}\right) a''_{n-1}(0)$...	$(n-2) \left(\frac{n-2-k}{n-k}\right) a_{n-2-k}(0) + c_{n-2-k}$	$\left(\frac{k}{k}\right) a_{k+1}(0) + c_{k+1}$
$c_n = 1$	$C_{n-1,k}^*$	$C_{n-2,k}^*$	$C_{n-3,k}^*$...	$C_{k+1,k}^*$	$C_{k+1,k}^*$

$$V_k = y^{(n-k-1)}(0) + \sum_{i=k+1}^{n-1} C_{i,k}^* y^{(i-k-1)}(0)$$
Tabuika VI

$\{a\} \sum_{i=0}^n (a_i + b_i(0))x_i(0) \omega$	$F_{-1} \frac{1}{\Delta t}$	\dots	$\Sigma_{i=0}^n a_i x_i \omega = h(t)$	$R_{10} = \frac{h(t)}{1 + \frac{\Delta t}{2} g_{n+1}(t)}$
$\frac{1}{\{a\} \sum_{i=0}^n (a_i + b_i(0))x_i(0) \omega}$	$\frac{1}{g_0 \omega^2 \frac{1}{\Delta t}}$	\dots	$h_{n+1} \omega^2 \frac{1}{\Delta t}$	\bar{R}_{10}
$\{a\} \sum_{i=0}^n (a_i + b_i(0))x_i(0) \omega$	$g_1 \omega^2 \frac{1}{\Delta t}$	\dots	$h_n \omega$	\bar{R}_{11}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$\{a\} \sum_{i=0}^n (a_i + b_i(0))x_i(0) \omega$	$g_n \omega^2 \frac{1}{\Delta t}$	\dots	$h_0 \omega$	\bar{R}_{1n}

Taboleta VII

[illegible]

Tabellen II

				$\psi_0 = \psi_0$		$\psi_0 = \frac{\psi^{(1)}_0}{1 + \frac{\alpha}{2} a_{n-10}}$		$\psi_0 = \frac{\psi^{(1)}_0}{1 + \frac{\alpha}{2} a_{n-10}}$	
$\bar{\psi}_0$	ψ_0	$\bar{\psi}_0$	ψ_0	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_1$	ψ_1	$\bar{\psi}_1$	ψ_1	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_2$	ψ_2	$\bar{\psi}_2$	ψ_2	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_3$	ψ_3	$\bar{\psi}_3$	ψ_3	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_4$	ψ_4	$\bar{\psi}_4$	ψ_4	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_5$	ψ_5	$\bar{\psi}_5$	ψ_5	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_6$	ψ_6	$\bar{\psi}_6$	ψ_6	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_7$	ψ_7	$\bar{\psi}_7$	ψ_7	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_8$	ψ_8	$\bar{\psi}_8$	ψ_8	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_9$	ψ_9	$\bar{\psi}_9$	ψ_9	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{10}$	ψ_{10}	$\bar{\psi}_{10}$	ψ_{10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{11}$	ψ_{11}	$\bar{\psi}_{11}$	ψ_{11}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{12}$	ψ_{12}	$\bar{\psi}_{12}$	ψ_{12}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{13}$	ψ_{13}	$\bar{\psi}_{13}$	ψ_{13}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{14}$	ψ_{14}	$\bar{\psi}_{14}$	ψ_{14}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{15}$	ψ_{15}	$\bar{\psi}_{15}$	ψ_{15}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{16}$	ψ_{16}	$\bar{\psi}_{16}$	ψ_{16}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{17}$	ψ_{17}	$\bar{\psi}_{17}$	ψ_{17}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{18}$	ψ_{18}	$\bar{\psi}_{18}$	ψ_{18}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{19}$	ψ_{19}	$\bar{\psi}_{19}$	ψ_{19}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{20}$	ψ_{20}	$\bar{\psi}_{20}$	ψ_{20}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{21}$	ψ_{21}	$\bar{\psi}_{21}$	ψ_{21}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{22}$	ψ_{22}	$\bar{\psi}_{22}$	ψ_{22}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{23}$	ψ_{23}	$\bar{\psi}_{23}$	ψ_{23}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{24}$	ψ_{24}	$\bar{\psi}_{24}$	ψ_{24}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{25}$	ψ_{25}	$\bar{\psi}_{25}$	ψ_{25}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{26}$	ψ_{26}	$\bar{\psi}_{26}$	ψ_{26}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{27}$	ψ_{27}	$\bar{\psi}_{27}$	ψ_{27}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{28}$	ψ_{28}	$\bar{\psi}_{28}$	ψ_{28}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{29}$	ψ_{29}	$\bar{\psi}_{29}$	ψ_{29}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{30}$	ψ_{30}	$\bar{\psi}_{30}$	ψ_{30}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{31}$	ψ_{31}	$\bar{\psi}_{31}$	ψ_{31}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{32}$	ψ_{32}	$\bar{\psi}_{32}$	ψ_{32}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{33}$	ψ_{33}	$\bar{\psi}_{33}$	ψ_{33}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{34}$	ψ_{34}	$\bar{\psi}_{34}$	ψ_{34}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{35}$	ψ_{35}	$\bar{\psi}_{35}$	ψ_{35}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{36}$	ψ_{36}	$\bar{\psi}_{36}$	ψ_{36}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{37}$	ψ_{37}	$\bar{\psi}_{37}$	ψ_{37}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{38}$	ψ_{38}	$\bar{\psi}_{38}$	ψ_{38}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{39}$	ψ_{39}	$\bar{\psi}_{39}$	ψ_{39}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{40}$	ψ_{40}	$\bar{\psi}_{40}$	ψ_{40}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{41}$	ψ_{41}	$\bar{\psi}_{41}$	ψ_{41}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{42}$	ψ_{42}	$\bar{\psi}_{42}$	ψ_{42}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{43}$	ψ_{43}	$\bar{\psi}_{43}$	ψ_{43}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{44}$	ψ_{44}	$\bar{\psi}_{44}$	ψ_{44}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{45}$	ψ_{45}	$\bar{\psi}_{45}$	ψ_{45}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{46}$	ψ_{46}	$\bar{\psi}_{46}$	ψ_{46}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{47}$	ψ_{47}	$\bar{\psi}_{47}$	ψ_{47}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{48}$	ψ_{48}	$\bar{\psi}_{48}$	ψ_{48}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{49}$	ψ_{49}	$\bar{\psi}_{49}$	ψ_{49}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{50}$	ψ_{50}	$\bar{\psi}_{50}$	ψ_{50}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{51}$	ψ_{51}	$\bar{\psi}_{51}$	ψ_{51}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{52}$	ψ_{52}	$\bar{\psi}_{52}$	ψ_{52}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{53}$	ψ_{53}	$\bar{\psi}_{53}$	ψ_{53}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{54}$	ψ_{54}	$\bar{\psi}_{54}$	ψ_{54}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{55}$	ψ_{55}	$\bar{\psi}_{55}$	ψ_{55}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{56}$	ψ_{56}	$\bar{\psi}_{56}$	ψ_{56}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{57}$	ψ_{57}	$\bar{\psi}_{57}$	ψ_{57}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{58}$	ψ_{58}	$\bar{\psi}_{58}$	ψ_{58}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{59}$	ψ_{59}	$\bar{\psi}_{59}$	ψ_{59}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{60}$	ψ_{60}	$\bar{\psi}_{60}$	ψ_{60}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{61}$	ψ_{61}	$\bar{\psi}_{61}$	ψ_{61}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{62}$	ψ_{62}	$\bar{\psi}_{62}$	ψ_{62}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{63}$	ψ_{63}	$\bar{\psi}_{63}$	ψ_{63}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{64}$	ψ_{64}	$\bar{\psi}_{64}$	ψ_{64}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{65}$	ψ_{65}	$\bar{\psi}_{65}$	ψ_{65}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{66}$	ψ_{66}	$\bar{\psi}_{66}$	ψ_{66}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{67}$	ψ_{67}	$\bar{\psi}_{67}$	ψ_{67}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{68}$	ψ_{68}	$\bar{\psi}_{68}$	ψ_{68}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{69}$	ψ_{69}	$\bar{\psi}_{69}$	ψ_{69}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{70}$	ψ_{70}	$\bar{\psi}_{70}$	ψ_{70}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{71}$	ψ_{71}	$\bar{\psi}_{71}$	ψ_{71}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{72}$	ψ_{72}	$\bar{\psi}_{72}$	ψ_{72}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{73}$	ψ_{73}	$\bar{\psi}_{73}$	ψ_{73}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{74}$	ψ_{74}	$\bar{\psi}_{74}$	ψ_{74}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{75}$	ψ_{75}	$\bar{\psi}_{75}$	ψ_{75}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{76}$	ψ_{76}	$\bar{\psi}_{76}$	ψ_{76}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{77}$	ψ_{77}	$\bar{\psi}_{77}$	ψ_{77}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{78}$	ψ_{78}	$\bar{\psi}_{78}$	ψ_{78}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{79}$	ψ_{79}	$\bar{\psi}_{79}$	ψ_{79}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{80}$	ψ_{80}	$\bar{\psi}_{80}$	ψ_{80}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{81}$	ψ_{81}	$\bar{\psi}_{81}$	ψ_{81}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{82}$	ψ_{82}	$\bar{\psi}_{82}$	ψ_{82}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{83}$	ψ_{83}	$\bar{\psi}_{83}$	ψ_{83}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{84}$	ψ_{84}	$\bar{\psi}_{84}$	ψ_{84}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{85}$	ψ_{85}	$\bar{\psi}_{85}$	ψ_{85}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{86}$	ψ_{86}	$\bar{\psi}_{86}$	ψ_{86}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{87}$	ψ_{87}	$\bar{\psi}_{87}$	ψ_{87}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{88}$	ψ_{88}	$\bar{\psi}_{88}$	ψ_{88}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}	A_{10}	A_{n-10}
$\bar{\psi}_{89}$	ψ_{89								

Tabelle 5[illegible]

II.

*Hospodárné metody
řešení regulačních obvodů*

10. IMPULSNÍ MODELY

Ing. Dr. Miroslav Štármox

ÚVH, Nový

10.1. Úvod

Jednou z důležitých otázek teorie automatické regulace je i teorie nejvhodnějšího nastavení regulátoru, t. j. přizpůsobení regulátoru dané regulační soustavě a regulačnímu úkolu, a její ověření. O této problematice byla v poslední době vydána řada publikací [1, 2], [3], [4], [4a] a theoreticky můžeme dnes pokládat tuto otázku za n-pokojivě vyřešenou. Až na směrnici Zieglera a Nichols [5] o nejvhodnější nastavení konstant regulátoru jsou všechny práce ryze theoretické a nebyly, pokud je málo známo, experimentálně potvrzeny. Aby bylo možno theoretické úvahy potvrdit, je nutno provést velkou řadu zkoušek regulačních pochodů. Pokud jsou tyto zkoušky prováděny přímo na regulovaných soustavách, jsou nákladné a je proto snáhou použít při nich modelů regulovaných soustav, které umožní provedení zkoušek v laboratorii. Podobně i pro řešení mnohých úloh teorie automatické regulace je výhodné použít modelů, neboť je jimi podstatně zkracována výpočtářská práce.

Na model regulované soustavy jsou přitom kladeny některé speciální požadavky a to především co do rozsahu časových konstant modelovaných soustav, neboť při zkouškách skutečných regulátorů je nutné pracovat s nezkráceným časovým měřítkem a model regulované soustavy musí mít stejné časové konstanty jako soustava sama. Naproti tomu přesnost modelu nemusí být příliš velká, v praxi se obvykle spokojujeme s přesností $\pm 5\%$.

Pokud omezíme své úvahy jen na statické soustavy, je jejich přechodová charakteristika nejčastěji vyjádřena vztahem

$$f(t) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i e^{-\lambda_i t - \omega_i t}, \quad (1)$$

kde A_0 je konečná hodnota regulované veličiny po jednotkové změně vstupní veličiny skokem, A_i a λ_i jsou konstanty, n je řád soustavy a t_d její dopravní zpoždění. Mezi konstantami A_0 a A_i platí vztah

$$A_0 + \sum_{i=1}^n A_i = 0. \quad (2)$$

Pro výpočet stability regulačního pochodu a často i pro výpočet nejvhodnějších konstant regulátoru bývá přechodová charakteristika dále zjednodušována. Tak na př. je přechodová charakteristika tvaru (1) nahrazována přechodovou charakteristikou soustavy prvního řádu s časovou konstantou T a dopravním zpožděním t_d ,

$$f_1(t) = A_0(1 - e^{-\frac{t-t_d}{T}}), \quad (3)$$

poměry jsou při tom voleny tak, aby se tečna v bodě $t = t_d$ charakteristiky (3) ztotožnila s tečnou v inflexním bodě charakteristiky (1), viz obr. 1. Jindy je prováděna náhrada lomenou čarou 0, 1, 2, 3 (obr. 1), t. j. přechodová charakteristika je nahrazena přímkami

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \quad \text{pro } 0 \leq t \leq t_d, \\ f(t) &= A_0 \frac{t}{T}, \quad \text{pro } t_d < t \leq t_d + T, \\ f(t) &= A_0 \quad \text{pro } T + t_d < t < \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Snadno bychom se přesvědčili, že charakteristikám (1), resp. (3) odpovídají diferenciální rovnice soustav

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y &= \\ = b_n \frac{d^n x}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \end{aligned} \quad (5)$$

resp.

$$a_n \frac{dy}{dt} + a_1 y = b_0 x(t - t_d), \quad (6)$$

kde $x(t)$ je vstupní, $y(t)$ výstupní veličinou soustavy a hodnoty a_i a b_i jsou konstantami.

Pro modelování regulovaných soustav je možno použít všech soustav, popsaných diferenciálními rovnicemi typu (5), resp. (6), u kterých konstanty a_i a b_i v rovnici soustavy původní (díl) i modelu jsou stejné. Můžeme proto pro modelování užít soustav elektrických, hydraulických, pneumatických nebo tepelných, stejně jako analogických elektronických modelů a podobně. Soustavy elektrické se vyznačují jednoduchostí (bývají sestaveny z odporů a kondenzátorů), jejich časové konstanty můžeme rychle a pohodlně měnit, nemůžeme však u nich dosáhnout dostatečně dlouhých časových konstant. Soustavy hydraulické, pneumatické a tepelné (podrobný seznam pramenů viz [6]) jsou dosti rozměrné a změny a přesná volba jejich časových konstant je obtížná. Analogické elektronické modely [7] jsou sice přesné a nastavení časových konstant je na nich přesné a pohodlné, tyto modely však vyžadují veliký počet stabilních stejnosměrných zesilovačů a jsou proto velmi nákladné. Uvedené modely regulovaných soustav nejsou proto vhodné pro rychlé zkoušky regulátorů v menších laboratorích a v provozech.

Uvedené nevýhody nemá dále popsany impulsní model, využívající kvan-
tového a paměťového účinku kondenzátorů. Je i pro soustavy vyšších řádů
jednoduchý a jeho časové konstanty je možno pohodlně a rychle měnit v
velmi širokém rozsahu. Na podobném principu je možno sestavit i model sou-
stavy prvního řádu s dopravním zpožděním, popsané diferenciální rovnicí (6),
s přechodovou charakteristikou (3). Základním článkem těchto modelů je
t. zv. impulsová soustava, kterou se v dalším budeme blíže zabývat. Okolnost,
že oba druhy modelů pracují nespojitě a jejich přechodové charakteristiky
jsou stupňové, není, jak ukážeme na příkladech, při práci s modely na závadu.

10.2. Impulsová kapacitní soustava

Uvažujme soustavu, vytvořenou sběrnou kapacitou C_1 a přenášecí kapa-
citou C , která je kontaktem j přepínána periodicky ze vstupního napětí $x(t)$ na
sběrnou kapacitu C^* , kterou nabíjí na výstupní napětí $y(t)$ (viz obr. 2a). Kon-
takt j je periodicky přepínán na př. tak, že na počátku intervalu T je z polohy a
přepnut do polohy b , ve které setrvává po dobu M , pak se vrací do polohy a
a setrvává v ní do konce intervalu T , viz obr. 2b. Pokud zanedbáme svody, mění
se napětí sběrné kapacity stupňovitě a je jak funkcí vstupního napětí $x(t)$, tak
i počtu přepnutí k .

Protože výstupní napětí $y(t)$ se mění v okamžicích $T, 2T, 3T, \dots$, je charak-
terizováno počtem přepnutí $k = 1, 2, 3, \dots$ od počátku pokusu a můžeme je
proto sledovat jako funkci počtu přepnutí, $y(k)$. Pro výstupní napětí bychom
snadno odvodili vztah

$$y(k) = \frac{C_1}{C + C_1} y(k-1) + \frac{C}{C + C_1} x(k), \quad (7)$$

kde $x(k)$ je vstupní napětí soustavy při k -tém přepnutí kontaktu j . Rovnice (7)
je diferenciální rovnice soustavy. Byla-li soustava až času $t = 0$ ($k = 0$) v klidu,
t. j. bez nábojů, a počne-li v tomto okamžiku působit konstantní napětí x_0 na
jejím vstupu, bude se výstupní napětí měnit podle vztahu*)

$$y(k) = x_0(1 - e^{-\lambda k}) = x_0(1 - e^{-\frac{k}{T_s}}), \quad (8)$$

kde jsme označili

$$e^{-\lambda} = \frac{C_1}{C + C_1}, \quad \lambda = \ln\left(1 + \frac{C}{C_1}\right). \quad (9)$$

Vidíme, že tato soustava se chová podobně, jako spojitá soustava prvního
řádu. Její časová konstanta je

$$T_s = \frac{T}{\lambda} = \frac{T}{\ln\left(1 + \frac{C}{C_1}\right)}, \quad (10)$$

kde T je doba intervalu mezi dvěma přepnutími kontaktu j . Jediným rozdílem
proti soustavě spojitě je ta okolnost, že změna výstupního napětí je v tomto
případě stupňová, t. j. její výstupní napětí je po úsecích spojitou funkcí času.

Závislost poměrné časové konstanty

$$\tau = \frac{T_s}{T} = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{C}{C_1}\right)}, \quad (11)$$

vyjádřené počtem period kontaktů j na poměru kapacit $\frac{C}{C_1}$ je na obr. 3.

Vidíme, že pro $\frac{C}{C_1} > 10$ můžeme klást přibližně

$$\tau \approx \frac{C_1}{C}, \quad T_s \approx T \frac{C_1}{C}. \quad (12)$$

Nevýhody impulsové kapacitní soustavy jsou zřejmé: časovou konstantu mů-
žeme ve velmi širokých mezích měnit poměrem kapacit C_1 a C a přepínací
frekvence $f = \frac{1}{T}$ konstantu j . Volíme-li na př. přepínací frekvenci $f = 0,1$ 1/s,

t. j. $T = 10$ s, je při poměru $\frac{C_1}{C} = 100$ (na př. $C_1 = 10 \mu\text{F}$, $C = 0,1 \mu\text{F}$)
výsledná časová konstanta $T_s \approx 1000$ s. Nevýhodou impulsové soustavy je ta
okolnost, že napětí na kondenzátoru C_1 (výstupní napětí) musíme měřit při-
strojem bez spotřeby (na př. elektrostatickým nebo elektronovým volt-
metrem).

Doposud jsme předpokládali ideální kondenzátory C a C_1 . Má-li kondenzátor
 C_1 svod R_1 , t. j. je-li jeho časová konstanta $T_1 = C_1 R_1$, změní se stupňová
přechodová charakteristika z výrazu (8) na

$$y_1(k) = x_0 \frac{C}{C + C_1 \left(1 - e^{-\frac{k}{T_1}}\right)} \left[1 - \left(\frac{C e^{-\frac{k}{T_1}}}{C + C_1}\right)^{\frac{T}{T_1}}\right]. \quad (13)$$

Vlivem svodu klesá časová konstanta soustavy na hodnotu

$$T_{s1} = \frac{T}{\frac{T}{T_1} + \ln\left(1 + \frac{C}{C_1}\right)}. \quad (14)$$

Současně klesá i zesílení soustavy, které bylo původně rovno jedné, na hodnotu

$$Z_{s1} = \frac{C}{C + C_1 \left(1 - e^{-\frac{T}{T_1}}\right)}. \quad (15)$$

V obr. 4 je nakreslena závislost časové konstanty T_{e1} a zesílení Z_{e1} na poměru doby cyklu T přepínacího kontaktu a časové konstanty T_1 kondensátoru C_1 , a to pro několik různých poměrů $\frac{C_1}{C_2}$. Vidíme, že minimální časová konstanta, kterou ještě u kondensátoru C_1 můžeme připustit, je asi $1000T$. Užíváme-li na příklad sběrné kapacity $C_1 = 10 \mu F$ a minimální přepínací frekvence $f = 0,05$ $1/s$ ($T = 20$ s) je nejmenší přípustný svodový odpor kondensátoru C_1

$$R_1 = \frac{T_1}{C_1} = \frac{2 \cdot 10^1}{10 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^6 \text{ ohmů.}$$

Při menších hodnotách svodového odporu kvalita soustavy rychle klesá.

10.3. Impulsová statická soustava vyššího řádu

V praxi přicházející regulační soustavy jsou obvykle vyššího řádu a bývají vytvořeny seriovým nebo seriově-paralelním řazením soustav prvního řádu. Přitom setkáváme se se dvěma druhy členů soustavy: členy, které se navzájem zpětně neovlivňují (na př. dvě za sebou zapojené nádrže, ve kterých je vyrovnávána koncentrace určité látky — změna koncentrace v druhé nádrži neovlivňuje zpětně koncentraci v nádrži první) a členy, které se zpětně ovlivňují (na př. členy tepelné soustavy — změna teploty ohřívajícího média zpětně působí na teplotu zdroje). Při modelování takových soustav musíme mít proto možnost vytvořit členy jak zpětně působící, tak i nepůsobící.

Přímým spojením dvou impulsových soustav prvního řádu podle obr. 5a získáme soustavu druhého řádu se zpětným působením. Soustavu druhého řádu bez zpětného působení získáme, vložíme-li mezi obě soustavy prvního řádu imedanční měniče LM , které při velmi vysoké vstupní impedanci dávají na výstupu napětí rovné napětí vstupnímu na malé impedanci (tedy vhodné zesilovače s úplnou negativní zpětnou vazbou), viz obr. 5b. Užiti imedančních měničů je ovšem nákladné a při soustavách vyššího řádu ztratili bychom výhody jednoduchosti impulsové soustavy. Soustavu vyššího řádu můžeme však vytvořit též bez užiti imedančních měničů (resp. jen s jedním imedančním měničem na výstupu soustavy), jestliže místo n přenášecích kondensátorů (n řád modelované soustavy) užijeme jediného přenášecího kondensátoru, který je během jedné periody přepnut ze vstupního napětí postupně na všechny sběrné kondensátory $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1n}$, na př. ve spojení podle obr. 6. Řetězec kontaktů a, b, \dots, n je přepínán vhodným způsobem (na př. relovým řetězcem A, B, \dots, N) tak, že relé A, B, \dots, N (v obrázku nekreslená) splňují postupně za sebou a zůstanou přitažena až do konce periody. Takovým způsobem získáme model statické soustavy bez zpětného ovlivňování jednotlivých členů při užiti jediného imedančního měniče na výstupu ze soustavy. Časové konstanty jednotlivých členů jsou opět určeny poměry $\frac{C_{1i}}{C}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) a vztahem (10).

S ohledem na to, že při seriovém řazení soustav s rozdílnými časovými konstantami mizí účinek členů s malými časovými konstantami proti účinku členů s velkými časovými konstantami, je často výhodné volit v modelu časové konstanty jednotlivých, za sebou spojených členů stejné, t. j. v případě podle obr. 6 volit sběrné kapacity C_{1i} stejné, $C_{11} = C_{12} = \dots = C_{1n} = C_1$. Takovou soustavu můžeme pak s přesností pro regulační účely vyhovující nahradit soustavou prvního řádu s časovou konstantou T_{e1} a fiktivním dopravním zpožděním t_d podle obr. 1. Označíme-li T_{e1} časovou konstantu jednoho členu soustavy n -tého řádu, je časová konstanta náhradní soustavy T_{e1} a fiktivní dopravní zpoždění t_d pro $n = 1, 2, \dots, 6$ dáno hodnotami v tabulce I. Tímto způsobem můžeme však naopak nahradit i soustavy s dopravním zpožděním soustavami vyššího řádu.

10.4. Statická soustava prvního řádu s dopravním zpožděním

Přesto, že soustava vyššího řádu se stejnými seriově řazenými členy celkem dobře vyjadřuje vlastnosti soustav s dopravním zpožděním, potřebujeme někdy i modely soustav se skutečným dopravním zpožděním. Takový model můžeme realizovat snadno využitím schopnosti kondensátoru podržet svůj náboj (či jak krátce říkáme, využitím kapacitní paměti).

Nabijme-li přepínačem vs , v pravidelných intervalech T přepínáním, řadu stejných kondensátorů $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1(n-1)}, C_{1n}$ vstupním napětím modelu $x(k)$ (obr. 7) a druhým přepínačem vj , synchronně přepínáním s prvním, jehož kontakt je však proti prvnímu opožděn o d kroků, vybíjíme tyto kondensátory do sběrné kapacity C_0 , bude stupňová přechodová charakteristika modelu

$$\frac{y(k)}{x_0} = 1 - \left(\frac{C}{C_1 + C} \right)^{k-d} = 1 - e^{-\lambda(k-d)}, \quad (16)$$

kde koeficient λ , resp. jeho převrtná hodnota, poměrná časová konstanta soustavy $\frac{T_e}{T} = \frac{1}{\lambda}$, je opět dán vztahy (9) a (10). Tímto způsobem získáváme model soustavy prvního řádu s dopravním zpožděním

$$t_d = Td \quad (17)$$

a časovou konstantou T_s . Maximálně dosažitelné dopravní zpoždění je dáno počtem přepínaných kondenzátorů a dobou cyklu T přepínání synchronně se pohybujícími přepínači rs a rj .

Ve Výzkumném ústavě acetylenové chemie byl na tomto principu konstruován model se 150 kondenzátory po $0,02 \mu F$ (kondenzátory Tesla se styroflexovou izolací), který při maximální době přepnutí $10 s$ dovoluje maximální dopravní zpoždění $1500 s$, s možností rozšíření na 450 kondenzátorů s maximálním dopravním zpožděním $4500 s \approx 75 \text{ min}$. Jako přepínač bylo užito telefonních hledačů, řízených řídily a sadou relé. Dopravní zpoždění, nastavené před pokusem třemi přepínači, určuje okamžik automatického spuštění výstupního přepínače opožděné po spuštění přepínače vstupního. Pro krokování voličů je jako impulsního generátoru užito elektrického časovače (hodin pro fotografy), u kterého je možno nastavit dobu cyklu od 1 vteřiny. V obr. 8 je reprodukovaná přechodová charakteristika soustavy, tímto modelem nahrazené.

Jako imedančních měničů bylo původně užíváno pH-metrů Tesla VUPEF, typ 364 [9] a k registraci bylo užito sovětského zapisovače EPD 07 s diskovým záznamem, u kterého byl pohon synchronním motorkem překonstruován na krokový pohon z dráhového časovače (impulsového generátoru). Tím bylo dosaženo snadné a rychlé možnosti změny zapisovací rychlosti. Z obr. 8 a dalších je zřejmé, že ani stupňovitý charakter výstupního napětí modelu, ani krokový impulsový pohon zapisovače nejsou na závadu.

Protože u uvedeného pH-metru vyskytovalo se obtíže v souvislosti s vlhkostí vzduchu nabíjení sběrné výstupní kapacity, byl překonstruován zesilovač zapisovače EPD 07 tak, že na nízkou první elektronky byl připojen přímo kondenzátor $0,05 \mu F$, který je přepínán vibrátorem vi na měřené napětí $y(k)$ a kompenzační napětí $u(k)$, automaticky měněné motorem kompenzátoru tak, aby byla trvale udržována rovnováha (obr. 9). Katodový odpor první elektronky byl přitom zvětšen tak, že elektronka pracuje jako katodový sledovač (úpravu provedl věd. asp. Ing. Jaroslav Maršík). Zapisovač pracuje v tomto spojení jako bezspotřební zapisující milivoltmetr již od rozsahu $0-60 \text{ mV}$.

10.5. Užítí impulsních modelů

10.5.1. Zkoušky regulátorů

V obrázku 10 je blokové zapojení modelu pro zkoušky regulátorů. Na model je zapojen imedanční měnič se zápisem regulované veličiny a vysílačem pro převáděcí člen I, který převede napětí nebo pohyb z imedančního měniče na vstupní veličinu zkoušeného regulátoru (el. napětí, tlak vzduchu a pod.). Za regulátorem je zapojen převáděcí člen II, který převede výstupní veličinu regulátoru na elektrické napětí (na př. servomotor s potenciometrickým vysílačem, manometr s potenciometrickým vysílačem a pod.). Po vhodném nastavení konstant modelu je možno tímto způsobem rychle zkoušet regulátory, regulovaná veličina je registrována. Podobně může být sestaveno i spojení pro víceparametrovou regulaci. V obr. 11a, b, c jsou uvedeny příklady takto registrovaných regulačních pochodů.

10.5.2. Integrovní a derivující člen, poddajná zpětná vazba

Impulsové kapacitní soustavy můžeme přímo užít jako přibližně integrovního a přibližně derivujícího členu. Výstupní napětí soustavy $y(k)$ po skokové změně vstupního napětí x_0 (obr. 12.) je

$$y(k) = x_0 (1 - e^{-\alpha k}) \approx x_0 \sum_{i=1}^k \alpha \quad (18)$$

(pokud je $\alpha \ll 1$, t. j. pokud je časová konstanta impulsové soustavy velká). Soustava působí proto jako přibližně integrovní člen.

Rozdíl napětí vstupního a napětí na kondenzátoru C_1

$$z(k) = x(k) - y(k) \quad (19)$$

je přibližným diferenciálem vstupního napětí, tedy na př. při lineárním stoupání vstupního napětí je

$$z(k) = x(k) - y(k) = \alpha k - y(k) = \frac{\alpha(1 - e^{-\alpha k})}{1 - e^{-\alpha}} \quad (20)$$

Pokud je časová konstanta $T_s = \frac{T}{\alpha}$ malá, je přibližně

$$z(k) \approx x(k) - x(k-1) = \alpha \quad (21)$$

a napětí $z(k)$ je přibližně rovno první diferencii napětí vstupního, tedy při dostatečně krátké době periody T i první derivaci napětí vstupního.

Stupňový přenos

$$\frac{\mathcal{L}[z(k)]}{\mathcal{L}[x(k)]} = \frac{e^p - 1}{e^p - e^{-\alpha}} \quad (22)$$

odpovídá přenosu poddajné zpětné vazby při spojitých regulacích

$$F(p) = \frac{p}{p + \alpha} \quad (23)$$

a můžeme proto napětí $z(k)$ užít též jako zpětnovazební napětí regulátoru k dosažení poddajné zpětné vazby. Časovou konstantu zpětné vazby můžeme přitom pohodlně měnit změnou kapacit $\frac{C_1}{C}$.

10.5.3. Diferenční člen

Kapacitní paměti můžeme užít i pro přesné vytvoření první difference vstupního napětí. Vycházíme přitom z definice

$$x(k) = x(k+1) - x(k) \quad (24)$$

a měříme rozdíl napětí v $(k-1)$ -ním intervalu proti napětí v k -tém intervalu tím, že měříme rozdíl napětí vstupního $x(k)$ a napětí jednoho z kondenzátorů C , které jsou střídavě přepínány na vstup, viz obr. 13.

Nekreslená relé A , B s kontakty a_1 , a_2 , b_1 , b_2 jsou buzena tak, že na př. v lichých intervalech $2k+1$ je buzeno relé A , v sudých intervalech $2k$ relé B . Podobným způsobem je možno vytvořit i druhou, třetí atd. difference, potřebný počet relé a jejich kontaktů přitom však rychle roste. Tak na příklad pro vytvoření druhé difference obdobným způsobem je zapotřebí čtyř relé celkem s 20 spínacími kontakty.

10.5.4. Model regulátoru PID

Použitím výše uvedených prvků můžeme vytvořit nejen model regulované soustavy, ale i model regulátoru, na př. proporcionálně-integračního s derivačním složkou. Jeho schema je nakresleno na obr. 14.

Vstupní signál pro model regulátoru (úměrný regulační odchylce) je vytvořen jako střídavé napětí $x(k)$, které je přes tři paralelně zapojené transformátory po usměrnění v usměrňovačích U_1 , U_2 a U_3 přivedeno ke třem děličům napětí, kterými jsou nastavovány jednotlivé složky regulátoru, proporcionální P , derivační D a integrační I . Velikost složek je možno měřit na připojených voltmetrech. Celkové zesílení modelu regulátoru je měněno v impedančním měniči IM .

10.6. Závěr

Bylo referováno o novém modelu statických regulovaných soustav, jehož působení je založeno na kapacitní paměti. Proti jiným modelům má výhodu v tom, že je ho možno použít i pro modelování soustav s velkými, snadno měnitelnými časovými konstantami. Podobně je možno konstruovat model soustavy s dopravním zpožděním a členy diferenční a integrující. Na několika příkladech bylo ukázáno na možnost použití modelů s impulsujícími kapacitními soustavami.

Literatura

- [1] R. C. OLDENBOURG a H. SARTORIUS, ASME-Paper No 53 A, 18 (1953).
- [2] H. SARTORIUS, Regelungstechnik 2 (1954), 165.
- [3] J. HANNY, Regelungstechnik 2 (1954), 171.
- [4] D. SINGER, Slaboproud. obzor 10 (1955), 120.
- [4a] R. REEBER, Regelungstechnik 4 (1956), 13.
- [5] J. G. ZISLER a N. B. NICHOLS, Trans. ASME 65 (1943), 433.
- [6] M. BALDA, Analogony regul. obvodů, Techn. zpráva Regula-vývoj, č. 17, 18 (1955).
- [7] D. SINGER, Použití analogonů pro řešení regulačních pochodů, Souhrn prací o automatizaci, Praha 1955.
- [8a] J. A. Z. CYPRIN, Porechodnyje i ustanovivijonja procesy v impul'snyh copjach, Moskva 1951.
- [8b] M. SALAMON, Nespojité regulace, Souhrn prací o automatizaci, Praha 1955.
- [9] M. SALAMON, Slabopr. obzor 17 (1956), 115.

Tabulka 1

n	$\frac{T_{22}}{T_{11}}$	$\frac{t_{d1}'}{T_{11}}$	$\frac{t_{d2}'}{T_{22}}$
1	1	0	0
2	2,66	0,20	0,100
3	3,72	0,77	0,207
4	4,5	1,42	0,315
5	5,15	2,1	0,411
6	5,7	2,8	0,492

- Obr. 1. Přechodová charakteristika soustavy vyššího řádu (a) a její náhrada soustavou prvního řádu s dopravním zpožděním t_d' (b) a lomenou čarou 0123 (c).
- Obr. 2. Impulsová soustava prvního řádu (a) a časový ná-d přepínání kontaktu j (b).
- Obr. 3. Závislost poměrné časové konstanty τ impulsové soustavy na poměru sběrné a přenášeč kapacit.
- Obr. 4. Závislost poměrné časové konstanty τ (a) a zesílení Z_{21} (b) impulsové soustavy na poměru doby cyklu T a časové konstanty sběrného kondenzátoru T_1 . Parametri: poměr sběrné a přenášeč kapacit.
- Obr. 5. Impulsová soustava druhého řádu se zpětným působením (a) a bez zpětného působení (b). IM impedanční měnič.
- Obr. 6. Impulsová soustava n -tého řádu bez zpětného působení.
- Obr. 7. Impulsová soustava prvního řádu s dopravním zpožděním.
- Obr. 8. Přechodová charakteristika impulsové soustavy prvního řádu s dopravním zpožděním.
- Obr. 9. Úprava potenciometrického elektronického zapisovače EPD-07 na impedanční měnič.
- Obr. 10. Blokové zapojení impulsového modelu pro zkoušení regulátorů.
- Obr. 11. Příklady regulačních pochodů při uspořádání podle obr. 10.
- Obr. 12. Integrační a derivační impulsní člen.
- Obr. 13. Diferenční impulsní člen.
- Obr. 14. Model PID regulátoru s impulsními členy.

11. ELEKTROMECHANICKÝ ANALOGON REGULAČNÍHO OBVODU EMAN I

Ing. MILAN BALDA
kand. tech. věd
Regulační ústav, n. p., Praha

V roce 1954 byl postaven na katedře technického měření a regulace na fakultě strojního inženýrství ČVUT v Praze prototyp elektromechanického analogonu regulačních obvodů s typovým označením EMAN I.

Koncepce analogonu vyplývá jednak z požadavků, jednak z rozboru vlastností známých typů analogonů regulačních obvodů. Protože zařízení je určeno především k pedagogickým účelům, je analogon postaven jako analogon vlastní, s vyjádřenými jednotlivými členy regulačního obvodu. Hodnota regulované veličiny a poloha regulačního orgánu se trvale zaznamenávají na záznamní pás. Časové konstanty jsou voleny tak, aby bylo možno sledovat průběh regulačního pochodu bez potíží přímým pozorováním.

Vlastní konstrukce analogonu byla pak dána těmito hledisky:

1. Vzhledem k omezeným možnostem dílenským musela být stavba co nej-
jednodušší, s omezeným počtem součástí, zejména mechanických.

2. Vyžadovala se jednoduchá obsluha, snadné a rychlé propojování jednotlivých funkčních celků a nastavování konstant.

3. Konečně se vyžadoval ucelený vzhled a bezpečnost při provozu.

EMAN I je analogon vlastní, u něhož se všechny vyšetřované veličiny převádějí na napětí. Skládá se z těchto funkčních celků:

- a) z analogonu regulátorů se zapisovačem polohy regulačního orgánu,
- b) z analogonu regulovaných soustav,
- c) ze zapisovače regulované veličiny.

Blokové schéma analogonu je znázorněno na obr. 1, zjednodušené schéma zapojení je na obr. 2. Jak patrně, zavádí se výstupní napětí ze soustavy na vstup regulátoru a výstupní napětí regulátoru na vstup soustavy. Tím je regulační obvod uzavřen. Zapisovač regulované veličiny je připojen paralelně k výstupu soustavy.

Na analogonu lze snímat přechodové charakteristiky rozpojených regulačních obvodů a jejich částí a vyšetřovat regulační obvody s proporcionálními nebo integračními regulátory a s regulovanými soustavami až do čtyř kapacit.

Práce s analogonem je velmi názorná a jednoduchá.

11.1 Analogon spojitých regulátorů

Analogon spojitých regulátorů je postaven tak, že lze na něm provádět tyto zásady:

- a) nastavovat pásmo proporcionality v rozsahu 12 až 100% nebo v jiných rozsazích po změně napětí zdroje zpětné vazby,
- b) nastavovat žádanou hodnotu regulované veličiny v celém rozsahu stupnice,
- c) znázornit vliv čidla,
- d) nastavit libovolnou charakteristiku regulačního orgánu,
- e) znázornit vliv vůle v mechanických spojeních na činnost regulátoru.

Mimo to se samočinně zapisuje poloha regulačního orgánu během regulačního pochodu.

Analogon spojitých regulátorů je regulátor napětí, který pracuje na podstatě samočinného elektronického potenciometru. Činnost vysvětlíme na základním schématu podle obr. 3. Regulovanou veličinou je výstupní napětí ze soustavy, připojené na vstup regulátoru. Toto napětí se má dodržovat konstantní.

Proti vstupnímu napětí, přiváděnému do regulátoru z analogonu soustavy, působí napětí od zpětné vazby. Rozdíl obou se zavádí do zesilovače, který napájí balanční motorek. Podle polarity tohoto signálu se otáčí balanční motorek na jednu nebo druhou stranu tak dlouho, až se napětí od zpětné vazby vyrovná s napětím vstupním. Pak je signál na vstupu zesilovače nulový a motorek se zastaví.

S běžecem potenciometru zpětné vazby je spojen běžec potenciometru, který znázorňuje regulační orgán. Zvětší-li se vstupní napětí regulátoru, uvede se balanční motorek a s ním spojené běžce potenciometrů do pohybu v takovém smyslu, že výstupní napětí z regulátoru klesá. Tím klesne i napětí v analogonu regulovaných soustav, takže se napětí na vstupu regulátoru (t. j. vlastní regulovaná veličina) vrátí přibližně na původní hodnotu.

Na obrázku 4 je kompletní blokové schéma regulátoru. Analogon spojitých regulátorů obsahuje tyto části:

- ZH stavění žádané hodnoty regulované veličiny,
- ZV obvod zpětné vazby,
- RO regulační orgán s nastavitelnou charakteristikou,
- < zesilovač,
- BM balanční motorek,
- RCL obvod znázorňující vliv čidla a dálkového přenosu.

Signál zavedený do regulátoru prochází nejdříve obvodem RC/L , který obsahuje proměnný odpor, kapacitu a indukčnost, kde se žádaným způsobem zformuje nebo zpozdí. Signál se dále porovnává s napětím odpovídajícím žádané hodnotě regulované veličiny. K odchyle od žádané hodnoty (t. j. k regulační odchyle) se přičte napětí od zpětné vazby a teprve výsledné napětí se zavádí do zesilovače. Ten pohání popsaným způsobem balanční motorek, který ovládá potenciometr regulačního orgánu.

Nastavování žádané hodnoty

Proti vstupnímu signálu se zavádí signál žádané hodnoty, stavěný ručně běžcem potenciometru. Do dalších členů regulátoru pak vstupuje rozdíl mezi žádanou a skutečnou hodnotou, t. j. regulační odchylka (obr. 5).

Nastavování zpětné vazby

K signálu zavedenému do zesilovače se přičítá signál od zpětné vazby (obr. 6). Je-li obvod zpětné vazby rozpojen, t. j. nedává-li zpětná vazba napětí, pracuje regulátor astaticky. Regulační orgán se ustálí v takové poloze, při níž se skutečná hodnota regulované veličiny, t. j. vstupní signál regulátoru, rovná žádané hodnotě, avšak s opačným znaménkem. V tomto případě dodržuje regulátor přesně žádanou hodnotu regulované veličiny, je však v podstatě nestabilní.

Při zapojené zpětné vazbě se přičítá k regulační odchyle napětí od zpětné vazby. Regulátor se ustálí v takové poloze, při níž se vstupní signál rovná součtu žádané hodnoty a signálu od zpětné vazby. Vzniká trvalá regulační odchylka, způsobená pevnou zpětnou vazbou. Regulátor pracuje staticky.

Sestavíme rovnici regulátoru v ustáleném stavu (obr. 7): regulátor je v klidu, je-li na vstupu zesilovače nulové napětí

$$u_4 - u_1 + u_3 = 0.$$

Zde je u_1 vstupní napětí regulátoru,

u_3 napětí, úměrné žádané hodnotě regulované veličiny ($u_3 = \text{konst}$),

u_4 napětí zpětné vazby.

Výchylka balančního motorku s , vztažená na pohyb zapisovacího pera, je přímo úměrná napětí zpětné vazby

$$s = ku_4,$$

kde je k zesílení regulátoru, nastavené předřazeným odporem R .

Při kladné výchylce balančního motorku klesá výstupní napětí u_4 (regulační orgán uzavírá). Označíme-li rozsah zdvihu s 0 až 1 a rozsah výstupního napětí u_4 také 0 až 1, platí, že

$$u_4 = 1 - s.$$

Z dílčích rovnic dostaneme pak rovnici regulátoru v ustáleném stavu

$$u_2 = 1 - k(u_1 - u_3).$$

Je tedy výstupní napětí přímo úměrné regulační odchyle. Zesílení regulátoru, t. j. poměr výstupního napětí k regulační odchyle, závisí na nastavení předřazeného odporu R .

Regulační orgán

Regulační orgán dovoluje nastavit libovolnou charakteristiku. Je vytvořen jako programový potenciometr (obr. 8). Potenciometr má 20 odboček, z nichž každou lze zapojit na dílčí napětí, odstupňovaný po 1%. Charakteristika regulačního orgánu je pak dána lomenou čarou, složenou z dvaceti úseků. Průběh lomené charakteristiky se může lišit od požadovaného průběhu nejvýše asi o 1%. Této přesnosti lze u skutečných regulačních orgánů dosáhnout jen výjimečně.

Zesilovač a balanční motorek

Analogon pracuje se stejnosměrným signálem, který je nutno převést na úměrný signál střídavý, potřebný k pohonu balančního motorku.

Stejnosměrný signál se mění ve střídavý ve střídači zapojeném jako kruhový modulátor. Výstupní napětí ze střídače je ve fázi nebo v protifázi se sítí podle polaritý vstupního signálu a jeho amplituda je úměrná velikosti vstupního signálu.

Výstupní napětí ze střídače se zavádí do střídavého elektronického zesilovače podobného provedení, jakého se používá u průmyslových samočinných potenciometrů.

Balanční motorek je dvounábový asynchronní motor se dvojitým vinutím. Jedno vinutí je napájeno ze zesilovače, druhé ze sítě přes kondensátor, takže napětí na něm je otočeno proti sítí o 90° . V prvním vinutí je napětí buď ve fázi nebo

v protifázi se síti podle polarit signálu na vstupu zesilovače. Tím vzniká v balančním motorku točivé magnetické pole v jednom nebo druhém smyslu. Při malých hodnotách vstupního signálu se motorek otáčí rychlostí úměrnou velikosti signálu.

Obvod pro znázornění vlivu čidla

Regulátor je vybaven *RCL* obvodem, kterým lze znázornit vliv čidla (na př. tepelnou setrvačnost a pod.). Obvod obsahuje odpor, kapacitu a indukčnost. Tyto prvky jsou proměnné a lze je zapojit v libovolné kombinaci.

Vstupní obvod regulátoru je upraven tak, aby bylo možno připojit po případě obvod pro matematické operace.

Obvod na znázornění vůle

V převodu mezi balančním motorkem a pohonem potenciometrů je upraven stavitelný výřez, takže je možno vyšetřovat vliv vůle (na př. v mechanických převodech) na průběh regulačního pochodu. Největší vůle, kterou lze nastavit, je asi 150° na hřídeli pohonu, t. j. asi 50% rozsahu stupnice.

Zapisovací zařízení

S běžící potenciometrů zpětné vazby a regulačního orgánu je spojeno zapisovací pero, které zaznamenává pohyb regulačního orgánu během regulačního pochodu. Šířka záznamu je 100 mm, posuv záznamního pásu je 5 mm/s.

Rovnice analogonu regulátorů

Pohybovou rovnici regulátoru sestavíme takto (obr. 7): balanční motorek se pohybuje rychlostí, úměrnou rozdílu napětí na vstupu zesilovače. Proti pohybu působí setrvačná hmota všech pohybujících se částí. Platí tedy pro pohyb balančního motorku (rovnici píšeme hned v bezrozměrném tvaru), že

$$\frac{u_1 - u_2}{u_{max}} - \frac{u_2}{u_{max}} = \frac{s_{max}}{u_{max}} \left(T_1 \frac{d}{dt} \frac{s}{s_{max}} + m \frac{d^2}{dt^2} \frac{s}{s_{max}} \right).$$

Podobně píšeme v bezrozměrném tvaru i vztah mezi velikostí napětí zpětné vazby a pohybem motorku:

$$\frac{u_2}{u_{max}} = \frac{s_{max}}{u_{max}} \frac{1}{k} \frac{s}{s_{max}}$$

a vztah mezi výstupním napětím a pohybem motorku (nehledíme-li k absolutním hodnotám):

$$- \frac{u_2}{u_{max}} = \frac{s_{max}}{u_{max}} \frac{s}{s_{max}}.$$

V rovnících značí

u_{max} vztažené napětí (na př. napětí kompensčního zdroje)
 s_{max} celkový zdvih regulačního orgánu,

$\frac{u_1 - u_2}{u_{max}} = \varphi$ poměrnou hodnotu regulační odchylky,

$\frac{u_2}{u_{max}} = \mu$ poměrnou hodnotu výstupní veličiny regulátoru,

T_1 součinitele, obdobného době závěru pohonu,

m součinitele, udávajícího vliv setrvačné hmoty,

k zesílení regulátoru.

Vyloučíme-li proměnné, které nás nezajímají, dostáváme rovnici regulátoru

$$\varphi = \frac{1}{k} \mu + T_1 \mu' + m \mu''.$$

V ustáleném tvaru jsou obě derivace rovny nule a rovnice regulátoru dostane tvar

$$\varphi_{ust} = \frac{1}{k} \mu.$$

Regulátor pracuje s trvalou regulační odchylkou, t. j. staticky. Statické zesílení regulátoru $\frac{\mu}{\varphi} = k$, jak jsme už dříve odvodili.

Jestliže rozpojíme obvod zpětné vazby ($k = \infty$), dostane rovnice regulátoru tvar

$$\varphi = T_1 \mu' + m \mu''$$

a regulátor bude pracovat astaticky, protože v ustáleném stavu bude regulační odchylka

$$\varphi_{ust} = 0.$$

Zesílení regulátoru k známe. Je dáno velikostí předraženého odporu v obvodu zpětné vazby. Ostatní hodnoty T_1 a m bychom mohli vypočítat z konstrukce přístroje. Je to však velmi pracné a v praxi se tohoto postupu nepoužívá. Hodnoty konstant vyšetřujeme proto zpravidla z naměřených dynamických charakteristik regulátoru. V daném případě mají jednotlivé konstanty tyto hodnoty:

$$\begin{aligned} k &= 1 \text{ až } 100, \\ T_1 &= 0,032 \text{ s}, \\ m &= 0,0034 \text{ s}^2. \end{aligned}$$

(Postup při vyhledávání číselných hodnot konstant je podrobně popsán v práci [1].)

11.2. Konstrukce analogonu regulovaných soustav

Analogon soustav je sestaven z řady odporů, kapacit a indukčností, které lze zapojit v libovolné kombinaci. Tím je možno znázornit velké množství technicky důležitých regulovaných soustav. Každý z prvků soustavy lze nastavit v deseti hodnotách. Na výstup soustavy je připojen katodový sledovač, aby soustava nebyla zatěžována nežádoucími vlivy.

Analogon regulovaných soustav obsahuje celkem 4 kapacity, 5 odporů, 2 indukčnosti a katodový sledovač se ziskem 0,92. Mimo to lze k soustavě připojit libovolný počet vnějších prvků.

Póly jednotlivých prvků analogonu jsou vyvedeny do dvojitého zdílek na panelu. Toto uspořádání dovoluje propojit jednotlivé prvky v libovolné kombinaci při nejmenším počtu zdílek, banánek, přepínačů, kablíků a pod. Prvky se propojují ohebnými kablíky s banánky.

Katodový sledovač je běžného provedení. Zisk sledovače je 0,92 (střední hodnota). Řízením předpětí sledovače je možno posunout záznam na zapisovači regulované veličiny do libovolné polohy na záznamním pásu.

Činnost analogonu regulovaných soustav byla kontrolována velkým počtem měření přechodových charakteristik různých druhů regulovaných soustav nebo jiných obvodů.

Přechodové charakteristiky byly snímány způsobem naznačeným na obrázku 9. Změna skokem na vstupu soustavy byla provedena rychlým přestavením běžce potenciometru z jedné krajní polohy do druhé. I když nejde ve skutečnosti o nekonečně rychlý skok (přestavení trvá asi 0,2 s), není tím průběh přechodové charakteristiky nikterak skreslen.

Analogon soustav je jednoduchý, práce s ním je přehledná a rychlá a přesnost vyhovuje.

Zapisovač regulované veličiny

Zapisovač regulované veličiny je elektronický samočinný potenciometr, shodný v podstatě se zapisovačem polohy regulačního orgánu. Mechanicky i elektronicky je proveden stejně, jen s tím rozdílem, že obsahuje pouze potenciometr zpětné vazby.

Blokové schéma zapojení zapisovače je na obr. 10. Největší odchylka od linearit mezi záznamem a vstupním signálem je menší než 0,5%. Přechod zapisovačského pera přes celou stupnici při změně vstupního signálu o 100% trvá průměrně 1 s. Šířka záznamu je shodná se zapisovačem polohy regulačního orgánu, t. j. 100 mm, stejně tak i posuv záznamního pásu 5 mm/s.

11.3. Příklady práce s analogonem

Na několika příkladech ukážeme praktickou použitelnost analogonu.

Charakteristiky soustav 1. řádu

Na obrázku 11 jsou uvedeny některé přechodové charakteristiky, přeskreslené z původních diagramů. Na jednotlivých přechodových charakteristikách byly kontrolovány body 63,2%, 90% a 99% konečné hodnoty, t. j. body v čase $t = T$, resp. $2,3T$ nebo $4,6T$, kde je $T = RC$ časová konstanta soustavy.

Bylo zjištěno, že odchylky záznamů od vypočteného průběhu jsou v mezích 1 až 3%.

Z obrázku je též patrné, že výstup soustavy je trvale zatěžován vstupním odporem sledovače, který je 70 MΩ. To způsobuje, že v ustáleném stavu je napětí na vstupu sledovače menší než napětí na vstupu soustavy v poměru odporu soustavy R a vstupního odporu sledovače.

Bude-li zisk sledovače 0,92, bude v ustáleném stavu na výstupu sledovače napětí

$$u_2 = 0,92 \frac{70}{70 + \Sigma R} u_1,$$

kde je u_1 napětí na vstupu soustavy,

u_2 napětí na výstupu sledovače (t. j. napětí, zaznamenané zapisovačem),

ΣR součet odporů soustavy, srovně fazených se sledovačem.

Naměřené hodnoty se v tomto případě velmi dobře shodují s vypočtenými hodnotami.

Charakteristiky soustav vyšších řádů

Na obrázku 12 jsou přeskresleny přechodové charakteristiky soustav, složených z 1, 2, 3 a 4 vzájemně na sebe působících členů RC . Časové konstanty všech členů jsou stejné ($RC = 1$ s). Jednotlivé charakteristiky byly kontrolovány s vypočtenými hodnotami a byly též zaznamenány několikrát. Odchylky od výpočtu a příslušné záznamy se liší nejvýše o 1 až 3%.

Charakteristiky náhradních obvodů

Na analogonu soustav s neoddělenými členy lze vyšetřovat jakost náhradních obvodů derivačních (D), proporcionálních plus derivačních (PD), proporcionálních plus integračních (PI) a proporcionálních plus integračních plus derivačních (PID). Těchto obvodů, složených z pasivních prvků, se používá u samočinných regulátorů, aby se zmenšil vliv zpoždění při přenosu signálu od čidla k regulátoru (obvod PD) a ve zpětných vazbách k dosažení žádané funkce regulátoru (obvody PD, PI, PID).

Ukážeme na příkladě, jak dalece se podaří reprodukovat charakteristiku obvodu PID na analogonu.

Je dán PID obvod podle schématu na obr. 13. Platí tyto zřejmé vztahy:

$$i_0 = i_1 + i_2; \quad i_1 = \frac{u_1 - u_2}{R_1}; \quad i_2 = C_2 \frac{du_2}{dt}; \quad u_3 = u_1 - u_2;$$

$$u_4 = u_1 + u_3; \quad u_4 = i_0 R_3; \quad i_0 = C_3 \frac{du_4}{dt}.$$

Po eliminaci proměnných, které nás nezajímají, dostáváme závislost výstupního napětí u_2 na vstupním napětí u_1 :

$$R_1 C_2 R_3 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + (R_1 C_2 + R_3 C_3) \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1 +$$

$$= R_1 C_2 R_3 \frac{d^2 u_1}{dt^2} + (R_1 C_2 + R_3 C_3) \frac{du_1}{dt} + u_1.$$

Vypočtené pohybové rovnici přísluší přenos

$$f(p) = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1 + p(T_1 + T_d) + p^2 T_1 T_d}{1 + p(T_1 + T_d + T_{1d}) + p^2 T_1 T_d},$$

$$\left(p = \frac{d}{dt}; \quad T_1 = R_1 C_2; \quad T_d = R_3 C_3; \quad T_{1d} = R_1 C_3 \right).$$

V daném případě je

$$R_1 = 1 \text{ M}\Omega, \quad C_2 = 1 \text{ }\mu\text{F}, \quad R_3 = 2 \text{ M}\Omega, \quad C_3 = 1 \text{ }\mu\text{F}$$

a tedy

$$T_1 = 1 \text{ s}, \quad T_d = 2 \text{ s}, \quad T_{1d} = 2 \text{ s}.$$

Dosadíme-li číselné hodnoty do rovnice pro přenos a provedeme-li zpětnou transformaci, dostáváme přechodovou funkci vyšetřovaného obvodu (t. j. řešení jeho pohybové rovnice pro $u_1 = 1$):

$$u_2 = 1 + 0,485e^{-2,281t} - 0,485e^{-0,219t}.$$

Na obrázku je porovnán originální záznam s vypočtenými hodnotami. Jsou zakresleny pro názor též obě exponenciály, z nichž se skládá přechodová charakteristika. Časová konstanta derivační složky $T_d = \frac{1}{2,281} = 0,44 \text{ s}$, integrační

složky $T_1 = \frac{1}{0,219} = 4,6 \text{ s}$. Proporcionální složka je tu $1 - 0,485 = 0,515$.

Průběh u skutečného obvodu (plně vytažený) se dobře shoduje s vypočteným průběhem, naznačeným čárkovaně. Větší odchylka vzniká na začátku průběhu, kdy se projeví omezená rychlost zapisovače. V dalším průběhu činí největší odchylka asi 2%.

Analogonu regulovaných soustav se dá tedy dobře použít i k vyšetřování podobných obvodů.

Průběh regulačního pochodu

Na obrázku 14 jsou nakresleny regulační pochody proporcionálního regulátoru, připojeného k soustavě druhého řádu. Regulační obvod byl vyveden z rovnovážného stavu násilným vychýlením regulačního orgánu. Regulační pochod, který následoval po uvolnění regulačního orgánu, byl zaznamenáván při různých zesíleních regulátoru.

Jak patrně, dává analogon velmi přehledné výsledky a s postačující přesností.

11.4. Závěr

Na elektromechanickém analogonu EMANu I lze vyšetřovat regulační obvody s proporcionálními nebo integračními regulátory a se soustavami až do 4 kapacit. Průběh hodnoty regulované veličiny a polohy regulačního orgánu v čase se zapisuje na záznamní pás. Činnost celého zařízení je natolik přehledná, že se ho používá k pedagogickým účelům.

Přesnost výsledků na analogonu činí podle okolností 1 až 5 %, což pro daný účel vyhovuje. Časové konstanty regulátoru a soustavy jsou voleny tak, aby vyšetřovaný pochod trval 10 až 20 s, t. j. 50 až 100 mm na záznamním pásu. Tím se dosáhlo dobré přehlednosti záznamu. Zkrácená časová konstanta dovoluje v krátké době vyšetřit velké množství případů.

Podle zkušeností s tímto analogonem byl vypracován projekt velkého elektromechanického analogonu EMANu II, který je t. č. ve stavbě v n. p. Regulační vývoj. Tento analogon bude obsahovat analogony spojitých i nespojitých regulátorů, soustav s oddělenými i neoddělenými prvky, a to jak soustav statických, tak astatických. Zařízení bude vybaveno samočinnými zapisovači frekvenčních charakteristik. Bude též obsahovat analogony soustav s rozloženými prvky a bude na něm možno vyšetřovat i víceparametrové regulace.

11.5. Dodatek

Při zpracovávání podkladů pro práci s analogonem je možno formulovat potřebná kritéria ještě jinak, než porovnáváním bezrozměrných parametrů, jak ukážeme na jednoduchém příkladě spojitého regulačního obvodu s poruchou konstantní velikosti.

Nechť má rovnice regulačního obvodu tvar:

$$T_m^m \psi^{(m)} + T_{m-1}^{m-1} \psi^{(m-1)} + \dots + T_2^2 \psi'' + T_1 \psi' + T_0 \psi = \kappa,$$

$$\left(\psi^{(i)} = \frac{d^i}{(dt)^i} \psi; \quad i = 1, 2, \dots, m \right).$$

Rovnice analogického obvodu pak je

$$S_m^m \psi^{(m)} + S_{m-1}^{m-1} \psi^{(m-1)} + \dots + S_2^2 \psi'' + S_1 \psi' + S_0 \psi = \lambda,$$

$$\left(\psi^{(i)} = \frac{d^i}{(d\tau)^i} \psi; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad \tau = \frac{1}{\alpha} t \right).$$

Zde značí φ poměrnou hodnotu regulované veličiny,
 ψ poměrnou hodnotu analogické veličiny,
 T_1, T_2, \dots, T_m časové konstanty regulačního obvodu,
 S_1, S_2, \dots, S_m časové konstanty analogického obvodu,
 κ poruchu v regulačním obvodu,
 λ poruchu v analogickém obvodu,
 α časové měřítko analogonu.

Časové konstanty píšeme v i -tém stupni, kolikátého řádu je derivace příslušného členu. Je to výhodné, protože součinitelé jednotlivých členů bezrozměrné rovnice mají rozměr času, což je mocnině, odpovídající řádu derivace.

Vyjádříme-li v rovnici analogického obvodu časové měřítko v poměru k časovému měřítku vyšetřovaného obvodu, dostaneme (pro $\tau = \frac{1}{\alpha} t$):

$$\alpha^m S_m^m \psi^{(m)} + \alpha^{m-1} S_{m-1}^{m-1} \psi^{(m-1)} + \dots + \alpha^2 S_2^2 \psi'' + \alpha S_1 \psi' + S_0 \psi = \lambda,$$

$$\left(\psi^{(i)} = \frac{d^i}{(dt)^i} \psi; \quad i = 1, 2, \dots, m \right).$$

Abyste uvedené rovnice popisovaly analogické pochody, musí platit:

1. v ustáleném stavu musí být poměrné odchylky pro stejné poměrné poruchy stejné veliké. Z toho plyne podmínka analogie

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{T_0}{S_0} = 1.$$

Tato podmínka je též zřejmá z toho, že oba obvody musí mít stejné statické zesílení, t. j. $T_0 = S_0$.

2. během přechodového stavu se musí rovnat stejnohlhlí součinitelé analogických rovníc, je-liž derivace se vztahují ke stejnému časovému měřítku. Je tedy

$$T_m^m = \alpha^m S_m^m, \quad T_{m-1}^{m-1} = \alpha^{m-1} S_{m-1}^{m-1}, \quad \dots, \quad T_2^2 = \alpha^2 S_2^2, \quad T_1 = \alpha S_1.$$

Lze se snadno přesvědčit, že uvedené rovnice se svým významem prakticky shodují s dřívějšími podmínkami analogie, t. j. s rovností odpovídajících bezrozměrných argumentů.

Nás tu však zajímá ještě jiná skutečnost. Vyjádříme-li časové měřítko postupně ze všech posledně uvedených rovnic, dostáváme:

$$\alpha = \sqrt[m]{\frac{T_m^m}{S_m^m}} = \sqrt[m]{\frac{T_m}{S_m}},$$

$$\alpha = \sqrt[m-1]{\frac{T_{m-1}^{m-1}}{S_{m-1}^{m-1}}} = \sqrt[m-1]{\frac{T_{m-1}}{S_{m-1}}},$$

$$\alpha = \sqrt[2]{\frac{T_2^2}{S_2^2}} = \sqrt[2]{\frac{T_2}{S_2}},$$

$$\alpha = \frac{T_1}{S_1}.$$

Můžeme tedy psát, že pro poměr časových konstant skutečného a analogického obvodu platí

$$\frac{T_m}{S_m} = \frac{T_{m-1}}{S_{m-1}} = \dots = \frac{T_2}{S_2} = \frac{T_1}{S_1} = \text{konst} = \alpha.$$

Podmínky analogie pak můžeme formulovat asi takto: Dva obvody budou analogické, budou-li jejich rovnice

$$T_m^m \frac{d^m}{(dt)^m} \varphi + T_{m-1}^{m-1} \frac{d^{m-1}}{(dt)^{m-1}} \varphi + \dots + T_2^2 \frac{d^2}{(dt)^2} \varphi + T_1 \frac{d}{dt} \varphi + T_0 \varphi = \kappa,$$

$$S_m^m \frac{d^m}{(d\tau)^m} \psi + S_{m-1}^{m-1} \frac{d^{m-1}}{(d\tau)^{m-1}} \psi + \dots + S_2^2 \frac{d^2}{(d\tau)^2} \psi + S_1 \frac{d}{d\tau} \psi + S_0 \psi = \lambda.$$

splňovat podmínky statické a dynamické analogie. Podmínka statické analogie je (pro $\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\kappa}{\lambda} = 1$):

$$\frac{T_0}{S_0} = 1.$$

Podmínka dynamické analogie je (pro $\tau = \frac{1}{\alpha} t$):

$$\frac{T_m}{S_m} = \frac{T_{m-1}}{S_{m-1}} = \dots = \frac{T_2}{S_2} = \frac{T_1}{S_1} = \alpha.$$

Takto definované kritérium analogie je v daném případě jednodušší, názornější a dává nahlédnout hlouběji do podstaty analogií, než obvykle používané kritérium s porovnáváním bezrozměrných parametrů.

Kritérium lze rozšířit i na obvody s poruchou libovolného průběhu a na obvody nelineární.

Literatura

- [1] M. BALDA, Elektromechanický analogon regulačních obvodů, Sborník I. vědecké konference fakulty strojního inženýrství ČVUT, SNTL Praha 1956.
- [2] M. BALDA, Analogony regulačních obvodů, Kandidátská disertační práce, katedra technického měření a regulace ČVUT v Praze, březen 1956.
- [3] L. S. EJOENSON, Modelirovanije, Sovetská nauka, Moskva 1952.
- [4] V. FERNER, Der Aufbau einer Modellregelstrecke, Technik 9, 1954, soč. 2, s. 85—89.
- [5] J. FERUDENREICH, Apparat zur Untersuchung von Regelungen, Brown Boveri Mitt., Juli 1944, s. 228—232.
- [6] L. J. GUTTENMACHER, Elektrické modely, AN SSSR, Moskva 1949.
- [7] J. M. L. JANSSEN, L. ENSING, Das Elektro-Analogon, ein Gerät zur Untersuchung von Regelmechanismen, Philips' Tech. Rdsch. 12, 1951, soč. 9, str. 262—276, soč. 11, s. 324—340.
- [8] R. J. KEDKREFF, H. MATTHEWS, Solving Process-Control by Analog Computer, Inst. and Aut. 27, 1954, soč. 10, str. 1624—1626.
- [9] G. A. KORN, Elektronnyje modelirujuščije ustrojstva, I. L. Moskva 1955 (překlad z angličtiny).
- [10] J. KOŽEŠNIK, Fyzikální podobnost a stavba modelů, JČMF, Praha 1948.
- [11] G. A. PHILBRICK, Designing Industrial Controllers by Analogue, Electronics, June 1948, s. 108—111.
- [12] P. PAVOS, Modellversuche über Reguliervorgänge, Techn. Rdsch., Sulzer 1948, soč. 3, str. 23—27.
- [13] D. SINGER, Použití analogonů pro řešení regulačních pochodů, Sborník Souhrn prací o automatizaci, ČSAV Praha 1955.
- [14] D. SINGER, Použití elektrických analogií pro typisace a posuzování regulačních soustav, Slaboproudý obzor 12, 1961, soč. 8, str. 171—178.

Obr. 1.
Obr. 2.
Obr. 3.
Obr. 4.
Obr. 5.
Obr. 6.
Obr. 7.
Obr. 8.
Obr. 9.
Obr. 10.
Obr. 11.
Obr. 12.
Obr. 13.
Obr. 14.

12. PROJEKT DIFERENCIÁLNÍHO ANALYSÁTORU LABO- RATOŘE PRO AUTOMATISACI A TELEMCHANIKU ČSAV

Ing. Jiří Haškovce
Praha, LAT - ČSAV

12.1. Úvod

Jedním z prvních úkolů LAT bylo zracionalisovat výpočtové práce. Poně-
vadž jde z velké části o výpočty, kterými se ověřují theoretické úvahy a o vý-
počty podkladů pro diagramy a tabulky, bylo nutno volit takový typ stroje,
který by měl dostatečnou přesnost. Nebylo však přitom možno volit stroj číslí-
cový, pro značnou nákladnost a pro nedostatek vhodných prvků ke stavbě
číslícových strojů u nás. S ohledem na nejčastější typy řešených rovnic byl
zvolen diferenciální analyzátor typu Bushova [1], [2], respektive Bushova-
Caldwellova [3], [4] s použitím některých zásad, obsažených v práci Erisma-
nově [5].

12.2. Operační jednotka

Bylo ovšem nutno volit konstrukci, umožňující výrobu na obyčejných obrá-
běcích strojích a s omezenými možnostmi součástkové základny, která se od
počátků prací v roce 1955 dodnes nezlepšila. S těchto hledisek byl zvolen výro-
ně jednoduchý třecí převod, používající styku mezi koulí a válcem (obr. 1).
Převod má tyto vlastnosti:

1. Styk mezi koulí a válcem je bodový a obě tyto plochy se snadno vyrábějí.
Odpadá choulostivá výroba třecího kolečka s přesně definovaným zaoblením,
používaným u obyčejných typů deskových.

2. Styk mezi koulí a válcem je možno namáhat poměrně velkým tlakem,
takže výstup integrátoru je možno zatížit jistým momentem bez nebezpečí
prokluzování.

3. Ústav získal potřebné součásti třecích převodů z vyřazených zaměřovačů.
Na obr. 2 je proveden rozbor převodu za předpokladu, že odvalení válce je
úměrno tangenciální složce pohybu dotykového místa na kouli. Na obr. 2 je
naznačen kulový vrchlík I , otáčivý kolem osy O_1 , kteréžto otočení označme x .
Tento vrchlík se kromě toho vyklání o úhel α zařízením, převádějícím otočení y
pohybového šroubu 6 ve vyklonění stolku 3, nesoucího ložiska pro otáčení
vrchlíku I kolem osy O_1 . Skládá se z vidlice, spojené s matkou na pohybovém
šroubu 6, která unáší kladku 4, spojenou s ložiskovým stolem 3. Vrchlík I se
dotýká třecího válce 2, otočného kolem osy O_2 . Toto otočení je označeno v_1 .
Zvolíme-li vhodné smysly otáčení za kladné, bude platit pro diferenciální otá-
čení

$$dv_1 = \frac{2r}{D} dx = \frac{2R \sin \alpha}{D} dx = \frac{2Ry'}{R'D} dx = \frac{2RK}{R'D} y dx,$$

kde K je stoupání šroubu 6, vztážené na jednotku y . Pro celkový počet otáček
 v_1 odvalených od nějaké počáteční polohy platí,

$$v_1 = \frac{2RK}{R'D} \int_0^x y dx,$$

kde jak y tak x je měřeno počtem otáček. Zloměk $\frac{2RK}{R'D}$ daný rozměry pře-
vodu určuje integrační konstantu. Na př. pro náš prvek byl zvolen 0,02. Přitom
rozsah y byl zvolen ± 100 otáček, takže největší převod je roven $100 \times 0,02 =$
 $= 2$.

Výstup V_1 pohání přímo jedno vstupní kolo součtového soukolí (diferenciálu).
Druhé vstupní kolo je připojeno přes převod 2 : 1 na další hřídel, jehož počet
otáček nazveme z . Výstup z diferenciálu je dán otáčkami planety, označené v .
Pro ně platí:

$$v = \frac{v_1 + 2z}{2},$$

což po dosazení z dřívějšího dává:

$$v = 0,01 \int_0^x y dx + z.$$

Aby bylo lze pohodlně měnit rozsahy a měřítka jednotlivých proměnných, je na
výstupní hřídeli uspořádáno několik stupňových převodů V_k ve stálém po-
měru 1 : 3 a na vstupním hřídeli z je možno obdržet pomocí rychlostní skříně
převody $Z_k = 1, 5, 7$. Takto sestavená základní jednotka může být zapojena
buď jako součtová, pak je hodnota y konstantní a pro výstup v platí:

$$v = V_k(0,01yx + Z_kz) = 0,01V_kyx + V_kZ_kz$$

nebo jako integrační. V tomto případě je možno zvětšit rozsah a přesnost pro-
měnné y tím, že hřídel z se otáčí úměrně otáčkám x pomocí vhodného stupně
nastavitelného převodu Z_k . Výstupní otáčky pak budou

$$dv = V_k(0,01y dx + Z_k dz)$$

neboli

$$v = V_k \int_0^x (0,01y + Z_k) dx.$$

Je-li na př. možno Z_k nastavit na hodnotu 1, 3, 5, 7, 9, je možno integrovat po $y = -1000$ až $+1000$, při čemž relativní chyba se zmenší na desetinu. Konstruktivně je jednotka provedena jako panelová, o normální výšce 5 p. j. = 225 mm a hloubce 300 mm. Na čelní stěně jsou kontrolní počítadla, signální žárovky jednotlivých servomechanismů a jejich 7pólové zástrčky (viz odst. 12.4) a vypínač, kterým se rozpojí mechanicky třetí převod při nastavování konstant a počátečních podmínek. Přívody a blokové obvody jsou propojeny nožovými listami.

12.3. Diagramová jednotka

Pro vytvoření mocnin a dalších libovolných funkcí jedné proměnné bude použito diagramové jednotky. Funkce, narysovaná na perforovaném registračním papíru užitečné šířky 250 mm se vloží na válec, který se otáčí úměrně s jednou proměnnou, označenou u . Nad válcem se pohybuje rovnoběžně s jeho osou otáčení snímací hlavice, opatřená fotoelektrickým sledovacím zařízením. Fotoelektrické zařízení pracuje s rotující optikou, takže jeho činnost je nezávislá na osvětlení místnosti. Posuv hlavice sleduje pomocí pohybového šroubu narysovanou křivku a přeměňuje se na otáčky výstupního hřídele v , opatřeného opět stupňovými převody V_k v poměru 1 : 3. Činnost lze tedy popsat výrazem:

$$v = V_k f(u),$$

kde $f(u)$ je libovolná funkce, znázorněná na diagramu. Tentýž přístroj lze použít také pro zapisování výsledků, vymění-li se snímací hlavice za zapisovací pero. Pohybový šroub je pak poháněn druhým vstupem t . Diagramová jednotka zapisuje pak závislost dvou libovolných proměnných

$$t = f(u).$$

Konstrukce je přizpůsobena tak, že je možno zapojit dvě diagramové jednotky za sebou. Na papír, procházející první jednotkou je zapisována nějaká funkce, která je snímána jednotkou druhou s jistým zpožděním. Tímto jednoduchým způsobem je možno řešit úlohy s dopravním zpožděním. Konstrukce je opět panelová, výška 3 p. j. = 135 mm, hloubka 300 mm. Propojovací zástrčky a ostatní ovládací a kontrolní zařízení je obdobné jako u operační jednotky (odst. 12.2).

12.4. Elektrický přenos

Kromě těchto dvou typů jednotek, jejichž počet závisí na složitosti řešeného úkolu, obsahuje stroj ještě řídicí jednotku, která jednak otáčí všemi hřídeli nezávisle proměnné, jednak obsahuje blokovací obvod a zařízení k automatické regulaci rychlosti celého stroje. Dále je projektována jednotka napájecí, která obsahuje příslušné zdroje pro servomechanismy, přenášející otáčky mezi jednotlivými hřídeli, jak bude ještě popsáno dále. Kontrola libovolného servomechanismu a nastavování konstant či počátečních podmínek se děje pomocí další kontrolní jednotky, kterou lze připojit na kterýkoli servomechanismus. I tato jednotka je provedena jako panelová.

Poněvadž je ve stroji nutno zprostředkovat velký počet přenosů polohy jednotlivých hřídelů, byl zvolen a navržen výrobně jednoduchý servomechanismus, jehož princip je naznačen na obr. 3.

Na straně přijímací je stejnosměrný motor M s permanentními magnety, který je tlumen nelineárními odpory R . Kotva motoru je připojena na kroužky m , a přijímacího kolektoru, který je opatřen 8 lamelami, z nichž vždy dvě protější jsou připojeny na jeden kroužek. Na lamely přiléhá 7 sběračů uhlíků a až g , které jsou přes odpory r připojeny na sedmipólovou zásuvku. Na vysílací straně je opět sedmipólová zásuvka, která je připojena k sedmi uhlíkovým vysílacím kolektorům. Ten má na rozdíl od přijímacího pouze čtyři lamely, připojené přes kroužky m , a na dva póly baterie, jejíž střed je zaveden do všech jednotek stroje. Rozměry lamel jsou voleny tak, že jsou vždy napájeny tři nebo čtyři dráty napětími obou polarit. Na přijímací straně obdobně jsou na dvojici kroužků k , l resp. m , n připojeny vždy tři nebo čtyři lamely. Spojení se děje sedmižilovými kabely s příslušnými zástrčkami. Z podrobnějšího rozboru (6) plyne, že při nějaké poloze vysílače existuje $1/28$ otáčky přijímače, kdy je motor M bez napětí. Při větší odchylce dostává motor z jednoho konce a středu baterie a při ještě větší odchylce z obou konců baterie napětí takové polarity, že se otáčí směrem zmenšujícím se odchylky. Napětí na kroužcích k , l kontroluje velikost odchylky. Překročí-li tato $1/28$ otáčky, ztrácí obě vinutí relé $1a$ a $1b$ napětí, kontakt $1c$ odpadá a působí na zařízení, které automaticky řídí rychlost otáčení hřídelů nezávisle proměnné a tím i rychlost celého stroje. Signální žárovka ukazuje, který servomechanismus dosahuje této meze dovolené odchylky. Na diagramové jednotce je podobné zařízení, které hlídá odchylku od sledované čáry. Rovněž jsou blokovány koncovými spínači koncové polohy vyklonění proměnného převodu y operační jednotky a koncové polohy snímací nebo zapisovací hlavice diagramové jednotky. Ve stejném obvodu působí i zařízení, které hlídá správnou činnost fotoelektrické snímací hlavy. Řídicí jednotka, v níž jsou všechny tyto funkce realizovány, obsahuje kromě signalizace těchto stavů a příslušných ovládacích prvků pro ruční řízení stroje také nastavitelné počítadlo otáček, které vypíná stroj po uběhnutí nastaveného počtu otáček.

Sedmižilové kabely, kterými se provádí spojení stroje podle řešené úlohy, mají na přijímací straně dvojitou zástrčku s opačným zapojením sledu žil, čímž je umožněno měnit smysl otáček hřídelů a tedy i znaménko zobrazené proměnné. Na straně vysílače je rovněž dvojitá zástrčka, která umožňuje připojení několika kabelů na jeden vysílač, což je potřebné na př. při použití paralelního převodu z.

Poněvadž jednotky jsou universální, umožní velkou přizpůsobivost stroje k různým úkolům. Jeho výkonnost poroste plynule s počtem vyrobených jednotek, celkem počítáme s výrobou 30 jednotek, takže celkové rozměry stroje by byly $2000 \times 2000 \times 400$ mm, příkon celkem 1 kW. Předpokládá se řešení nelineárních diferenciálních rovnic do desátého řádu s šesti nelinearitami danými diagramy a se záznamem 2 libovolných funkcí. Osvědčí-li se tato koncepce je samozřejmě možné další rozšíření bez jakýchkoliv potíží.

Literatura

- [1] V. BUSH, The Differential Analyser. A new Machine for Solving Differential Equations. Journal of the Franklin Institute, Oct. 1931, s. 447--448.
- [2] V. HRAVŠKA, Bushův integrál. Fysika v technice (1946), č. 1, str. 24.
- [3] V. BUSH, S. H. CALDWELL, A New Type of Differential Analyser. Journal of the Franklin Institute (1945), No 4, str. 255-326.
- [4] A. SVOBODA, Elektromechanický diferenciální analyzátor. Fysika v technice (1948), č. 1, str. 23.
- [5] TH. ERISMANN, Eine neue Integriranlage. Zeitschrift für angewandte Mathematik u. Mechanik (1952), No 8/9, s. 242, 245.
- [6] L. HILBERT, Návrh optimálního nelineárního servomechanismu, 1959. Diplomní práce. Fakulta elektrotechnická, ČVUT Praha.

Obr. 1. Kulový převod opornění jednotky

Obr. 2. Náčrtek k odvození velikosti proměnného převodu.

Obr. 3. Funkční schéma servomechanismu.

13. METODA SYNTHESY PÁKOVÝCH MECHANISMŮ NA DIFERENCIÁLNÍM ANALYSÁTORU

Ing. VÁCLAV ČERNÝ, Doc. Ing. Dr. ANTONÍN SVOBODA

Ústav matematických strojů ČSAV, Praha

Graficko-mechanické a numerické metody synthesy pákových (kloubových) mechanismů byly již popsány [1], [2], [3]. V této práci ukážeme metodu, užívající elektronických operačních článků repetičního diferenciálního analyzátoru.

13.1 Úvod

Čtyřkloubový rovinný mechanismus představuje často užívaný operační článek mechanických analogových strojů. Pracuje přitom jako generátor funkce jedné nezávislé proměnné. Má tyto výhodné vlastnosti: mechanizuje funkce dosti obecného typu, přenáší značné otáčivé momenty při zanedbatelných ztrátách třením, zaujímá malý prostor a je snadno a přesně vyrobitelný. Nevýhodou je obtížná synthesa mechanismu a skutečnost, že mechanismus generuje danou funkci

$$x_2 = f(x_1), \quad x_{1m} \leq x_1 \leq x_{1M} \quad (1,1)$$

zpravidla ne zcela přesně. Generovaná funkce je dána výrazem

$$x_2 = f(x_1) + \delta x_2, \quad (1,2)$$

kde chyba δx_2 , závislá na x_1 , se nazývá strukturální chybou mechanismu. Tato chyba se dá různými metodami měnit tak, aby vyhověla určitým optimálním podmínkám, není však zpravidla možno ji zcela vyloučit.

13.2. Prvky čtyřkloubového mechanismu

Čtyřkloubový mechanismus (obr. 1) se skládá ze dvou klik o délkách g_1, g_2 . Kliky jsou otočně uloženy na rámu v kloubech S_1, S_2 , jejichž vzdálenost považujeme za jednotkovou. Volné konce klik T_1, T_2 jsou spojeny táhlem o délce $T_1 T_2 = \sqrt{g_0}$. Natáčíme-li klikou g_1 v úhlu X_1 , natáčí se kliky g_2 v úhlu X_2 a platí

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= F(X_1), \\ X_{1m} &\leq X_1 \leq X_{1M}, \quad X_{2m} \leq X_2 \leq X_{2M}, \\ \Delta X_1 &= X_{1M} - X_{1m}, \quad \Delta X_2 = X_{2M} - X_{2m}. \end{aligned} \right\} \quad (2,1)$$

Při použití kloubového generátoru funkce rozhoduje tvar funkce F bez zřetele na velikosti intervalů $\Delta X_1, \Delta X_2$. Tento tvar vystihneme nejlépe, užijeme-li homogenních parametrů [1] podle vztahů

$$H_1 = \frac{X_1 - X_{1m}}{\Delta X_1}, \quad H_2 = \frac{X_2 - X_{2m}}{\Delta X_2}. \quad (2,2)$$

Závislost $H_2 = F(H_1)$, kterou obdržíme zavedením homogenních parametrů do (2,1), je graficky zobrazena čarou ve čtverci o jednotkové straně (obr. 2).

Užití homogenních parametrů si můžeme představit velmi názorně. Kliky g_1 se pohybuje výlučně uvnitř intervalu ΔX_1 . Na tento interval si promítneme rovnoměrně rozdělenou stupnici H_1 od nuly do jedné. Podobně si počínáme u kliky g_2 . Na těchto stupnicích čteme pak přímo vzájemně přiřazené hodnoty homogenních parametrů H_1, H_2 pro libovolnou polohu klik.

Při metodě synthesy, kterou dále popíšeme, potřebujeme některé pomocné vztahy. Podle obr. 1 píšeme:

$$\left. \begin{aligned} U &= 1 + g_1 \cos(X_{1m} + H_1 \Delta X_1) - g_2 \cos(X_{2m} + H_2 \Delta X_2), \\ V &= g_1 \sin(X_{1m} + H_1 \Delta X_1) - g_2 \sin(X_{2m} + H_2 \Delta X_2), \\ g_0 &= U^2 + V^2. \end{aligned} \right\} \quad (2,3)$$

Úloha, kterou řešíme, zní takto: Je dána funkce $H_2 = F(H_1)$. Hledáme sedm výtvarných parametrů $g_0, g_1, g_2, X_{1m}, X_{2m}, \Delta X_1, \Delta X_2$ tak, aby byly splněny rovnice (2,3) pro každé H_1 .

Tato úloha je zpravidla neřešitelná, žádáme-li její přesné splnění. Musíme připustit strukturální chybu mechanismu, na př. tím, že v rovnicích (2,3) dovolíme malé změny veličiny g_0 . Tuto veličinu můžeme vypočítat velmi snadno elektronickými operačními články podle rovnic (2,3) a sledovat její změny v závislosti na ostatních šesti výtvarných parametrech i na proměnné H_1 .

13.3 Operační síť stroje na synthesu čtyřkloubového mechanismu

Zapojení elektronických operačních článků při provádění synthesy je na obr. 3. V tomto skupinovém schématu vytváří se nejdříve funkce podle rovnice (2,3). Pokusným nastavením šesti výtvarných parametrů obdržíme průběh g_0 jako funkce H_1 (což je v tomto případě nezávislé proměnná — čas). Veličina

g_0 nebude pravděpodobně konstantní. Abychom mohli pohodlně sledovat změny průběhu g_0 , připojíme ještě další tři operační články: sčítačkou přičteme $-g_0$, výsledek $\vartheta = g_0 - g_0$, umocníme a integrujeme v intervalu $0 \leq H_1 \leq 1$. Na obrazovce čteme konečně výsledek integrace

$$\Theta = \int_0^1 \vartheta^2 dH_1. \quad (3,1)$$

Měníme-li hodnotu g_0 , tak, aby Θ bylo minimální, bude konečná hodnota g_0 odpovídat střední časové hodnotě veličiny g_0 . Hodnota Θ bude pak udávat integrál čtverců odchylek od střední hodnoty a bude tedy kritérium pro posouzení, s jakou přesností generuje mechanismus danou funkci. Pak měníme postupně hodnoty ostatních šesti výtvarných parametrů, a to vždy současně se změnou g_0 , tak, aby Θ klesalo. Pokračujeme tak až do okamžiku, kdy je nemůžeme snížit Θ změnou kteréhokoli parametru. Výtvarné parametry $g_0, g_1, g_2, X_{1m}, X_{2m}, \Delta X_1, \Delta X_2$, při kterých jsme dosáhli minima Θ , definují mechanismus, který generuje danou funkci $H_1 = F(H_1)$. Chyba mechanismu se vyčíslí a uváže, zda mechanismus vyhovuje.

13.4. Závěr

Popsaná metoda se hodí přímo pro repetiční elektronkový diferenciální analyzátor. Generátory funkcí užijeme obrazovkové s fotonásobiči. Vzhledem ke skutečnosti, že existuje zpravidla několik lokálních minim hodnoty Θ pro velmi různé kombinace výtvarných parametrů, není zaručeno, že kterému řešení se dostaneme. V tomto ohledu mají výhodu metody graficko-mechanické.

Literatura

- [1] A. SVORODA, Computing Mechanisms and Linkages, Radiation Laboratory Series M. I. T., Cambridge, Mass., Vol. 27, 1948.
- [2] Z. SH. BLOKH, E. B. KARPIN, Praktické metody synthésy rovinných čtyřkloubových mechanismů, Izdatelstvo Akademii nauk SSSR, Moskva-Leningrad 1943.
- [3] E. B. KARPIN, Atlas nomogramů, Izdatelstvo Akademii nauk SSSR, Moskva-Leningrad 1943.

Obr. 1. Rovinný čtyřkloubový mechanismus.

Obr. 2. Zobrazení závislosti $H_1 = F(H_1)$.

Obr. 3. Operační síť stroje na synthésu čtyřkloubového mechanismu.

14. POUŽITÍ HARMONICKÉHO ANALYSÁTORU V REGULAČNÍ TECHNICE

Prof. Dr. Ing. ZDENĚK TANKA
Laboratoř pro automatizaci a telemechaniku ČSAV

Ing. ZDENĚK KOTEK
ČVUT

14.1. Úvod

V tomto článku bude popsáno použití synchronního analyzátoru v regulační technice. Jeho popis byl již uveřejněn v dřívějších publikacích [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Fotografie nového provedení analyzátoru podává obr. 1. Přístrojem lze provádět analýzu křivek napětí a proudů do frekvence 50 c/s. Generátorem lze vytvořit libovolnou křivku napětí z 24 pořadnic a tuto křivku buď přímo analyzovat nebo ji lze použít pro napájení na př. vyšetřovaného obvodu (viz dále). Protože kolektory analyzátoru jsou vlastně potenciometry, které nahrazují funkce \sin vz. stupňovou křivkou, lze též užít analyzátoru napájeného stejnosměrným napětím jako generátoru napětí $\sin(\omega t + \varphi_1)$, $\sin(2\omega t + \varphi_2)$, ..., $\sin(9\omega t + \varphi_9)$. Toto napětí lze užít pro vyfiltrování k synthese periodické křivky jak naznačuje obr. 2 a obr. 3.

14.2. Určování frekvenčních charakteristik součástí servomechanismů

Generátorem funkce vytvoříme periodickou nesinusovou funkci obsahující harmonické 1:-9. Základní frekvenci, t. j. otáčky analyzátoru, volíme dostatečně nízké, abychom obdrželi ty body frekvenční charakteristiky, které pro nás mají důležitost. Výhodné je nastavit nesinusovou křivku takového tvaru, jehož Fourierovu řadu známe. Vektory harmonických výstupů dělené příslušnými vektory vstupních harmonických dávají pak body frekvenční charakteristiky, t. j.

$$G(j\omega_0) = \frac{A_0^{100\%}}{A_0^{100\%}}$$

Určení členů $G(j\omega)$ lze provést odměřením stejnosměrné složky na výstupu a na vstupu a jejich přímým vydělením. Vhodnou volbou vstupní funkce lze dosáhnout stejnosměrné přesnosti v určování devíti bodů frekvenční charakteristiky. Pro vyšetřované součásti s derivačním charakterem volíme na př. vstupní křivku pilového tvaru; pro součásti s integrálním charakterem křivku blízkou se impulsové funkci.

Vyšetřuje-li se na př. polohový servomechanismus, je výhodné na výstup připojit tachodynamko, čímž obdržíme derivaci výstupního průběhu, a podpoříme tím vyjádření vyšších harmonických a tím i zvýšení přesnosti.

Jako indikátoru pro určování harmonických se pro nízké frekvence servomechanismů osvědčil fluxmetr, u něhož lze při určování některé harmonické nechat proběhnout několik cyklů, čímž určíme střední hodnotu koeficientu A , za několik cyklů, t. j. eliminujeme nahodilé chyby.

14.3. Určování frekvenčních charakteristik z grafů vstupní a výstupní funkce

U některých zařízení nelze měřit frekvenční charakteristiku uvedeným způsobem. Na př. u zařízení, které jsou v trvalém provozu. V takových případech lze provést nějakou změnu vstupní veličiny, na což reaguje zařízení změnou výstupní veličiny. Obě veličiny, t. j. výstupní i vstupní, registrujeme přístroji. Jsou-li obě registrované funkce takové povahy, že existuje jejich Fourierova transformace, lze psát

$$G(j\omega) = \frac{F\{f_2(t)\}}{F\{f_1(t)\}},$$

kdež

$$F\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Kdyby průběhy $f_1(t)$ resp. $f_2(t)$ nebyly transformovatelné podle Fourierovy transformace, lze též psát

$$G(j\omega) = \frac{F\{f_2'(t)\}}{F\{f_1'(t)\}} = \frac{F\{f_2''(t)\}}{F\{f_1''(t)\}}.$$

14.4 Získání odezvy na daný průběh vstupu při daném průběhu frekvenční charakteristiky

Běžně užívaný způsob je ten, že se určí inverzní Fourierův integrál k $G(j\omega)$, který dává odezvu na jednotkový impuls. Pomocí konvolutorního integrálu se určí odezva na danou vstupní funkci.

Výhodnější lze řešit tuto úlohu pomocí zapojení uvedeného v obr. 2. Odečteme-li 9 vektorů z frekvenční charakteristiky na obr. 4 pro frekvence $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$, t. j. $A_1 e^{j\omega_0 t}, A_2 e^{j2\omega_0 t}, \dots$ lze sečtením těchto vektorů obdržet přímo na oscilografu odezvu daného systému na jednotkový impuls.

Nastavíme tedy na potenciometrech P_1, P_2, \dots amplitudy harmonických, na kartáčích jejich úhly a na oscilografu pak obdržíme výstup při jednotkovém impulsu na vstupu.

K určení odezvy na daný vstupní signál lze postupovat tak, že signál (pokud existuje jeho Fourierova transformace) nastavíme na generátoru funkcí v takové délce, aby v posledních pořadnicích konvergoval k nule, t. j. aby $\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ bylo lze nahradit $\int_0^T f(t) e^{-j\omega t} dt$ a určíme koeficienty Fourierovy řady pro délku periody T . Pro frekvence nalezených harmonických najdeme ve frekvenční charakteristice přenosy, jimiž násobíme nalezené harmonické vstupní funkce. Synthesou výstupních harmonických obdržíme odezvu na danou vstupní funkci.

14.5. Užití analyzátoru k řešení polynomů

Je-li dán polynom tvaru

$$A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_0 = P,$$

kde koeficienty A_n jsou čísla reálná nebo komplexní, lze jej substitucí

$$z = re^{j\varphi} = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

převést na tvar

$$A_n r^n e^{jn\varphi} + A_{n-1} r^{n-1} e^{j(n-1)\varphi} + \dots + A_0 = P,$$

a když za φ položíme $\varphi = \omega t$ lze napsat

$$A_n r^n \cos n\omega t + A_{n-1} r^{n-1} \cos (n-1)\omega t + \dots + A_0 = \operatorname{Re} \{P\},$$

$$A_n r^n \sin n\omega t + A_{n-1} r^{n-1} \sin (n-1)\omega t + \dots + A_1 \sin \omega t = \operatorname{Im} \{P\}.$$

Kdyby člen A_n byl komplexní $\bar{A}_n = A_n e^{j\psi}$ projevovalo by se to v reálné části členem $A_n \cos n(\omega t + \psi)$ a v imaginární části členem $A_n \sin n(\omega t + \psi)$.

Tyto vztahy lze realizovat pomocí analyzátoru tak, že analyzátor napájený stejnosměrným proudem je generátorem funkcí $\cos \omega t$ resp. $\sin \omega t$ i event. $\cos(\omega t + \psi)$, $\sin(\omega t + \psi)$. Obr. 5 ukazuje schéma zapojení. Z analyzátoru vycházejí napětí, obsahující kromě základních frekvencí $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ ještě další harmonické. Ty jsou odfiltrovány filtry F_1, \dots, F_n . Za nimi jsou cejchované potenciometry k nastavení koeficientů A_1, \dots, A_n . Za nimi pak jsou funkční potenciometry r, r^2, r^3, \dots, r^n (pro rozmezí $r = 1 \div 0,5$). Za těchto potenciometrů jsou pak katodové sledovače s Görgesovými mřížkami, vyrábějící z daného napětí ještě napětí posunutá o 90° , t. j. z členů $\cos \omega t$ ještě $\sin \omega t$. Za těmito členy jsou napětí sčítána a to tak, že členy reálné jsou uvedeny na horizontální desky osciloskopu, imaginární členy jsou přiváděny na vertikální desky. Tim obdržíme na osciloskopu trajektorii pro všechny hodnoty $\omega t = 0 \div 360^\circ$. K zjištění konkrétní hodnoty $z = re^{j\omega t}$ slouží posouvač fáze, který z napětí první harmonické libovolně posune vytvoří elektronkovým obvodem napěťový impuls, který přiveden na mřížku obrazovky osciloskopu, vyznačí na trajektorii svítící bod. Natáčením fáze posouváním fáze lze svítící bod libovolně posouvat po trajektorii. Pro vyčíslení polynomu pro dané r , nastaví se toto na potenciometrech a dané t_1 na posouvači fáze. Koeficienty A_1, \dots, A_n nastaví se na cejchovaných potenciometrech. Je-li A_n komplexní, nastaví se $|A_n|$ na potenciometrech, fáze pak na kartáčku analyzátoru.

Na trajektorii oscilografu lze pak odečítat amplitudu a fázi polynomu P nebo složky $\operatorname{Re} \{P\}$ a $\operatorname{Im} \{P\}$. Člen A_0 nutno k výsledku přičíst nebo posunout o osy o $\operatorname{Re} \{A_0\}$ ev. $\operatorname{Im} \{A_0\}$.

K řešení kořenů algebraické rovnice najdeme, kdy trajektorie prochází nulou změnou potenciometrů r . Když je toho dosaženo fázovým posouváním přivedeme svítící bod do počátku a na jeho stupnici odečteme $\omega t_1 = \varphi$, a na potenciometrech čteme r , t. j. nalezneme kořen $z = re^{j\varphi}$. Vzhledem k tomu, že přístroj je ve stadiu zkoušek, nelze ještě popsat výsledky této metody.

14.6. Vyšetřování nelineárních regulačních obvodů

Analysátoru můžeme také použít k určování stability nelineárních regulačních obvodů pomocí frekvenčních charakteristik. Odmětime ekvivalentní frekvenční charakteristiku nelineární části obvodu a frekvenční charakteristiku zbývajících lineárních částí. Jejich vzájemná poloha určuje stabilitu obvodu. Je to způsob určování stability, spočívající na metodě harmonické rovnováhy [7, 8, 9, 10].

Předpokládejme blokové schéma podle obr. 6, kde $G_2(j\omega)$ znamená přenos lineární části obvodu, t. j.

$$G_2(j\omega) = \frac{X_2(j\omega)}{X_1(j\omega)}$$

a $G_n(A, \omega)$ je ekvivalentní přenos nelineární části. Tento přenos stanovíme takto.

Předpokládejme, že na vstupu nelineárního prvku je sinusový signál

$$x_1 = A \sin \omega t.$$

Pak na výstupu tohoto prvku je obecně nesinusový průběh daný jeho nelineární charakteristikou $x_2 = N(x_1)$, t. j.

$$x_2 = N(A \sin \omega t).$$

Tento výstupní signál nahradíme jeho první harmonickou. Tato aproximace je pro většinu případů oprávněná, protože zbývající lineární část regulačního obvodu má obvykle přenos odpovídající charakteristice nízkofrekvenčního filtru, takže vyšší harmonické jsou tlumeny.

Použijeme-li symbolického vyjádření sinusových průběhů rotačními vektory, dává nám poměr první harmonické na výstupu k sinusovému vstupu t. zv. ekvivalentní přenos nelineárního prvku

$$G_s(A, \omega) = \frac{X_s(A, \omega)}{X_i(A, \omega)}.$$

Tento přenos je funkcí nejen frekvence ω , ale i amplitudy A vstupního signálu, zatím co u lineárních členů je, jak známo, přenos $G_L(j\omega)$ funkcí jen frekvence ω .

Existence oscilací v daném obvodu je dána rovnicí

$$G_s(A, \omega) G_L(j\omega) + 1 = 0. \quad (14.1)$$

Upravíme-li tuto rovnici do tvaru

$$-G_L(j\omega) = \frac{1}{G_s(A, \omega)} = G_s^{-1}(A, \omega), \quad (14.2)$$

určuje průsečík záporné frekvenční charakteristiky lineární části $-G_L(j\omega)$ s ekvivalentní inverzní frekvenční charakteristikou nelineární části $G_s^{-1}(A, \omega)$ amplitudu A i frekvenci ω možných kmitů.

Hlavním problémem této metody je stanovení ekvivalentní frekvenční charakteristiky $G_s^{-1}(A, \omega)$ nelineárního prvku. V uvedené literatuře [7, 8, 9, 10] se uvažují především nelineární prvky, které mají přenos závislý jen na amplitudě, t. j. prvky u nichž výstupní signál závisí jen na průběhu vstupního signálu a nezávisí na jeho derivacích ani integrálech. Pro některé typické nelineární charakteristiky odpovídající takovýmto prvkům jsou spočteny příslušné přenosy $G_s(A)$. Pro jiné případy je nutno provádět mnohdy velmi pracné výpočty.

Význam použití analyzátoru je v tom, že tuto ekvivalentní charakteristiku nelineárního prvku můžeme přímo měřit. Zapojení analyzátoru je na obr. 7. Na vstup měřeného nelineárního prvku je přivedeno sinusové napětí u_i z generátoru funkce. Jeho amplitudu A je možno nastavit stejnosměrným napětím U_n , frekvenci ω nastavením otáček pohonného motoru M . Výstupní napětí u_s je přivedeno na kolektor odpovídající první harmonické, takže měřící přístroj na výstupu analyzátoru měří amplitudu a fázi první harmonické výstupního signálu u_s nelineárního prvku. Vzhledem k tomu, že při vyšetřování regulačních obvodů se měření provádí při velmi nízkých frekvencích, používá se na výstupu jako měřícího přístroje fluxmetru. Odečtení údaje fluxmetru se provede po proběhnutí několika cyklů.

Měření provedeme vždy pro několik hodnot vstupní amplitudy A při konstantní frekvenci ω (t. j. konstantních otáčkách analyzátoru). Do komplexní roviny na obr. 8 vyneseme takto zjištěný přenos $G_s^{-1}(A, \omega)$ a dostaneme soustavu křivek o parametru ω a okótovaných hodnotami vstupní amplitudy A . Do téže roviny nakreslíme přenos lineární části $-G_L(j\omega)$, který můžeme na př. stanovit způsobem uvedeným v odstavci 14.2.

Ustáleným oscilacím odpovídají podle rovnice (14.2) průsečíky charakteristik $G_s^{-1}(A, \omega)$ a $-G_L(j\omega)$, kde souhlasí frekvence ω na obou charakteristikách. Toto ω a amplituda A odečtené na charakteristikách $G_s^{-1}(A, \omega)$ určují frekvenci a amplitudu těchto oscilací. Rozborem rovnice (14.2) určíme v nakreslených frekvenčních charakteristikách, který z průsečíků odpovídá stabilnímu a který nestabilnímu oscilacím.

Při použití analyzátoru je možno také zhodnotit vliv vyšších harmonických přesunutím kartáčku na kolektor příslušné harmonické.

Literatura

- [1] Z. TANKA, Harmonický analyzátor napětí a proudu, Elektrotechn. obzor 31 (1942), 49–52.
- [2] Z. TANKA, Die harmonische Analyse von Spannungs- und Stromkurven, Arch. Elektrotechn. 36 (1942), 123–130.
- [3] Z. TANKA, Analýza empirických křivek, Elektrotechn. obzor 35 (1946), 221–229.
- [4] Čs. patent 74020.
- [5] DRP 742 446.
- [6] Z. TANKA, Přednáška v ESČ 1940.
- [7] GOLDFARB, O nektorech nelinejnostjach v sistemach avtomatičeskogo regulirovanija, Avtomatika i telemekhanika, T. VIII, No 5, str. 349–383, 1947.
- [8] TUSTIN, The Effects of Backlash and of Speed-Development Friction on the Stability of Closed-cycle Control Systems, J. Inst. Elec. Engrs. (London), Vol. 94, Part IIA, No 1, May 1947.
- [9] OPPELT, Locus Curve Method for Regulators with Friction, J. Inst. Elec. Engrs. (London), Vol. 94, Part IIA, May 1947.
- [10] KOCHENBURGER, A Frequency Response Method for Analysing and Synthesizing Contactor Servomechanisms, Trans. AIEE, Vol. 69, Part I, str. 270–284, 1950.

Obr. 1. Fotografie nového provedení analyzátoru.

Obr. 3. Fotografie analyzátoru pro syntézu periodické křivky.

Obr. 4. Frekvenční charakteristika.

Obr. 5. Schema zapojení analyzátoru pro řešení polynomů.

Obr. 6. Blokové schéma regulačního obvodu s nelineárním prvkem.

Obr. 7. Schema zapojení analyzátoru pro určení ekvivalentní frekvenční charakteristiky nelineárního prvku.

Obr. 8. Ekvivalentní frekvenční charakteristiky nelineárního prvku.

15. ELEKTRONICKÉ METODY ANALOGICKÉHO VÝPOČTU

Ing. BOHUMIL MACEK

VÚT Praha

15.1. Úvod

Se stoupajícími nároky na regulaci se přirozeně zvyšují i požadavky na aparát používaný k analýze a synthese zpětnovazebních obvodů. Pokud jde o regulátory s jakkoliv složitou kombinací lineárních či — přesněji řečeno — „téměř lineárních“ prvků, nečiní ovšem řešení potíží: Dobře známá frekvenční metoda je velmi účinný a pružný nástroj, který se dá snadno uplatnit i u těch nejnáročnějších systémů. Pro regulátory s několika podstatnými nelinearitami naproti tomu jednoduché matematické či matematicko-grafické řešení prakticky neexistuje, třeba se na metodách řešení nelineárních systémů pracuje s velkým úsilím. Mnohem výhodnější je sáhnout v tom případě k poloexperimentálnímu metodám a matematický přístup k analýze a synthese doplnit řešením na modelech.

Zařízení používaná k modelování regulátorů jsou — s hlediska jejich funkce v procesu analýzy a synthese — analogické počítače určené k řešení lineárních i nelineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů. Použití analogických počítačů tohoto druhu se ovšem uplatňuje nejen v regulační teorii a technice, ale i v řadě dalších oborů vědy a techniky a také se neomezuje jen na účast při výpočtu: Vřazením univerzálních i specializovaných analogických počítačů do složitých zpětnovazebních systémů se podařilo automatisovat velmi náročné výrobní, kontrolní i měřicí procesy. Tento způsob použití je sice teprve v počátcích svého rozvoje, ale otvírá — o tom není pochyby — automatisačním snahám nové cesty.

Požadavky na modelující analogické počítače se přes velký rozsah aplikací analogického výpočtu v mnoha ohledech shodují. A je přirozené, že s růstem potřeby nároky stoupají: Ať se jedná o kteroukoliv úlohu — o modelování přístrojových servomechanismů či automatického řízení letadla nebo o transformaci souřadnic v automatizovaném přistávacím zařízení a o další a další použití — žádá se téměř vždy co největší přesnost řešení, spolehlivý chod, malé nároky na obsluhu, kromě toho je obvykle velmi důležitá pružnost a všestrannost počítačů sítí a možnost vřazení počítače do reálného systému, a rozhoduje i cena a náročnost výroby. Daleko největší počet těchto podmínek splňují elektronické analogické počítače s jednorázovým řešením. To plyne ze zřejmého studia možností jednotlivých analogických metod a dokazuje to i světový směr vývoje analogických počítačů dokumentovaný vedle mnoha a mnoha jiných zpráv přednáškami a diskusí na II. všesvazové konferenci o teorii automatické regulace [1]. V usnesení, které bylo na této konferenci přijato, je kromě toho zdůrazněn rozhodující význam analogického výpočtu pro další rozvoj regulace a k splnění automatizačních úkolů sovětského průmyslu je požadováno podstatné rozšíření výzkumných a vývojových prací v oboru analogického výpočtu a zavedení kvalitních elektronických počítačů do sériové výroby. Tyto závěry platí ovšem i pro naše hospodářství. Práce na analogických počítačích nebude nutno teprve zahajovat — v mnoha případech se bude moci vyjít z výsledků dosažených ve Výzkumném ústavu telekomunikací (VÚT).

Cílem základních i aplikačních výzkumných prací, které VÚT počítačům věnoval, bylo zvládnout hlavní metody elektronického analogického výpočtu a vyvinout řadu prvků a součástí i elektronických dílů a přístrojů vhodných k sestavení velmi přesných elektronických analogů několika základních úloh algebraického i diferenciálního počtu. V rozsahu úloh, o které šlo, jsou v podstatě zahrnuty i operace, jež je nutno použít při řešení regulačních systémů. Aby byla dále kryta i potřeba počítačích zařízení pro přímé užití v automatizovaných procesech, byly elektronické analogy doplněny analogiemi elektromechanickými, které umožňují velmi přesně řešit i nelineární úlohy s úzkopásmovým dobře tlumeným průběhem závislé i nezávisle proměnných, a kromě toho byly vyvinuty i servomechanismy vhodné pro transformaci elektrických veličin na veličiny mechanické. Při konstrukci všech počítačích prvků a částí se vyšlo z perspektivních principů známých z literatury a ty byly na místech, kde publikovaná řešení nevyhovují či nepostačují doplněny výsledky původních výzkumných prací.

15.2. Lineární úlohy

Ve většině aplikací analogického počítače se vyžaduje řešení čistě lineárních úloh. Jde o kombinaci operací, jakými jsou změna znaménka, násobení a dělení konstantou, součet a rozdíl, integrace a derivace, při nichž vztah mezi vstupem a výstupem řešení nezávisí na amplitudě vstupu. Všechny lineární operace se v elektronickém analogickém počítači modelují spolehlivě a přesně pomocí stejnosměrného počítačového zesilovače se silnou zápornou zpětnou vazbou [2]. Návrh vhodného počítačového zesilovače není sice nikdy snadnou záležitostí, ale hlavní problém — odstranění pomalých změn stejnosměrné hladiny výstupního napětí způsobených driftem, to je kolísáním pracovních potenciálů elektrod elektronek a napájecích napětí — byl již spolehlivě zvládnut objevením principu automatického nulování.

15.2.1. Analýza počítačích zesilovačů s automatickým nulováním

Stejněměrný počítač zesilovač s automatickým nulováním má proti zesilovači bez nulování navíc střídavou zesilující větev označenou v blokovém schématu na obr. 1 příslušným přenosem k_{ss} . Střídavá (st) větev složená z modulatoru, který převádí stejnosměrné (ss) chybové napětí u zesilovače na úměrné st napětí, ze zesilovače modulovaného napětí a z demodulatoru, použitého k zpětnému převodu zesíleného modulovaného napětí na napětí stejnosměrné, zvyšuje zesílení ss zesilující větve $-k_{ss}$ o hodnotu přenosu k_{ss} , který není driftem ovlivněn, a tím snižuje stejnou hodnotou vliv driftu ss větve. Ten je ve schématu vyznačen ekvivalentním napětím u_0 na vstupu do ss větve. Do napětí u , lze ovšem zahrnout i vliv všech ostatních rušivých napětí, jež se do počítačích zesilovačů dostávají v jeho zesilující části.

Vztah pro nulovací účinek st větve a ostatní hlavní údaje o funkci počítačích zesilovačů plynou z rovnice pro výstupní napětí u_0

$$u_0 = - \left[u \frac{Z_0}{Z_1} + u_s \frac{Z_0 + Z_1}{Z_1} \frac{1}{(1 + k_{ss})} + i Z_0 \right] \frac{ky(p)}{1 + ky(p)} \quad (1)$$

odvozené řešením obecného blokového schématu na obr. 1. Tuto rovnici, v níž výraz $ky(p)$

$$ky(p) = [1 + k_{ss} f_{ss}(p)] k_{ss}(p) \frac{Z_1(p)}{Z_0(p) + Z_1(p)} \quad (2)$$

značí přenos otevřené smyčky zesilovače, lze pro užitečné pásmo frekvencí zjednodušit na přibližný tvar

$$u_0 = - u \frac{Z_0}{Z_1} - u_s \frac{Z_0 + Z_1}{Z_1} \frac{1}{(1 + k_{ss})} - i Z_0 \quad (3)$$

Aproximace platí pro ss signál a ostatní frekvence, na nichž je $ky(p)$ dosti vysoké, aby

$$\frac{ky(p)}{1 + ky(p)} \approx 1 \quad (4)$$

Zjednodušená rovnice ukazuje, že výstupní napětí počítačích zesilovačů je složeno ze tří složek: První, $-u_s \cdot Z_0/Z_1$, představuje užitečný signál rovný žádané lineární funkci vstupního napětí a druhé dvě účinek rušení.

Na přenos užitečného signálu má, jak vidět, vliv pouze poměr obou impedancí ve zpětné vazbě. Jak určit volbu Z_1 a Z_0 charakter přenosu a tím i funkci zesilovače v analogickém výpočtu, to ukazuje přehledně tabulka I. První čtyři řádky tabulky definují zapojení zpětné vazby k získání analogií inverse, násobení konstantou, derivace a integrace. V dalších řádcích jsou uvedena zapojení analogií ostatních důležitých lineárních operací.

V rušivém obsahu výstupního napětí se projevuje jednak účinek driftu a ostatního napětového rušení u , a jednak účinek rušivého proudu i , do něhož je zahrnut mřížkový proud vstupní elektronky ss větve a ostatní proudy, které tekou z místa vstupu zesilujících větví (bod A v blokovém schématu na obr. 1) jinam než do impedancí Z_1 a Z_0 . St větev má, jak ukazuje rovnice (3), velmi příznivý vliv na rušení driftem: Potlačuje je téměř úplně maximální hodnotou úzkopásmového zesílení k_{ss} . Tím je odstraněn hlavní nedostatek ss zesílení, který je jinak nutno kompenzovat nákladnou stabilizací zdrojů, speciálním zapojením vstupních obvodů ss větve a kromě toho nezbytným častým ručním nulováním zesilovače. Na rušení vlivem i , nemá naproti tomu nulovač st větve žádný účinek, a proto je nutno snížit proud i na minimální hodnotu vhodnou konstrukcí obvodů vstupní elektronky.

Matematické odvození informací o pochodech v počítačích zesilovačích lze podepřít fyzikálním názorem, jehož osvojení je pro práci s elektronickými analogickými počítači velmi důležité. Jde o to uvědomit si, že bod A v blokovém schématu je pro všechny důležité frekvence téměř přesně na potenciálu země. Toto „virtuální uzemnění“ styčného bodu impedancí Z_1 a Z_0 je zajištěno vysokým kombinovaným zesílením obou elektronických větví zesilovače. Proč, to je jasné: Nejsou-li zesilující větve zahlceny, jejich mnohatisíkové zesílení předpokládá i při dosti vysokém výstupním napětí několika desítek voltů téměř zanedbatelný vstupní signál v bodě A neboli přibližné uzemnění tohoto bodu. Pomocí předpokladu o virtuální zemi se snadno odvodí vztah pro přenos signálu u : Signál u je zaveden na odpor Z_0 , kterým tudíž protéká proud u/Z_0 ; tento proud teče do impedance Z_1 a výstupní napětí zesilovače má proto hodnotu $-u \cdot Z_1/Z_0$. Že impedancí Z_1 teče kromě toho i proud i , to plyne ze stejného předpokladu. A jednoduchý je i názor na účinek driftu: Vyjde-li se z případu nulového vstupního signálu a nulového rušivého proudu, stačí pro určení velikosti rušivého výstupního napětí, způsobeného driftem, převést předpoklad o virtuálním uzemnění do bodu B blokového schématu a sečíst napětí v okruhu z A do B; součet chybového napětí v bodu A, rovného $u \cdot Z_1/(Z_0 + Z_1)$, napětí u , a výstupního napětí st větve je roven nule,

$$u \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} + u_s + u_0 \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} \cdot k_{ss} = 0 \quad (5)$$

a z toho rušivé výstupní napětí u_0

$$u_0 = - u_s \frac{Z_0 + Z_1}{Z_1} \frac{1}{1 + k_{ss}} \quad (6)$$

15.2.2. Otevřená smyčka počítačového zesilovače

Všechny základní úvahy o počítačím zesilovači, plynoucí ze zjednodušené rovnice (3) či z fyzikálního názoru, platí přesně pro pásmo frekvencí, v němž má přenos otevřené smyčky $ky(p)$ zesilovače velmi vysokou hodnotu — na příklad několik desítek tisíc — a vliv výrazu $ky/(1 + ky)$ na funkci zesilovače lze zanedbat. Hlubší analýza, zabývající se chybami v analogickém výpočtu a otázkami stability zesilovače, s tímto zjednodušením ovšem nevystačí. V obou případech je nutno všimnout si důkladněji funkce $ky(p)$. Nejlépe je při tom postupovat frekvenční metodou.

Všechny informace důležité pro analýzu zesilovače — a přirozeně i pro syntézu jeho elektronických větví — jsou obsaženy v amplitudové charakteristice otevřené smyčky. Charakteristika funkce $ky(p)$ jednoho z počítačích zesilovačů vyvinutých ve VÚT, použitého k sčítání je na obr. 2a a charakteristika téhož zesilovače, zapojeného jako integrátor je na obr. 2b. Obě charakteristiky jsou sestaveny způsobem patrným v diagramech z dílčích charakteristik funkcí k_1y_1 a k_2y_2 , jež jsou pro obě zapojení stejné, a z charakteristiky funkce $L_1/(Z_0 + Z_1)$, jež má v případě sčítání hodnotu $\frac{1}{2}$ a v případě integrace tvar $pCR/(1 + pCR)$.

Podmínka, týkající se zajištění bezpečné stability, určuje průběh amplitudových charakteristik $ky(p)$ v širokém okolí Nyquistova bodu. V této oblasti musí mít amplitudová charakteristika sklon -20 dB/dekádu. Velkou amplitudovou bezpečnost je nutno zajistit nejen pro možnost značných změn v zeslení způsobených stárnutím elektroněk, ale i proto, aby byla možná široká změna impedancí Z_1 a Z_2 .

Pro řešení otázek přesnosti je důležitá frekvence jednotkového zeslení v grafu $|ky(j\omega)|$ a průběh grafu směrem k nulové frekvenci. V zásadě má být zesilovači ponechána v co nejširším pásmu vysoká stejnosměrná hodnota zeslení k_1 a k_2 , přenosu obou jeho zesilujících větví a mezní frekvence zesilovače, rovná zhruba frekvenci bodu jednotkového zeslení, má být co nejvyšší. Ani jeden, ani druhý požadavek nelze splnit dokonale. To se ovšem projeví chybami v analogickém výpočtu.

15.2.3. Přenos sumačního zesilovače

Přenos zesilovače v zapojení upraveném pro součet napětí u_1 , u_2 , u_3 a u_4 má sice podle tabulky I tvar

$$u_0 = - \left(u_1 \frac{R_0}{R_1} + u_2 \frac{R_0}{R_2} + u_3 \frac{R_0}{R_3} + u_4 \frac{R_0}{R_4} \right), \quad (7)$$

ale ten je nutno poopravit úvahou o odchylkách funkce $ky/(1 + ky)$ od předpokládané jednotkové hodnoty. Amplitudu těchto odchylek $A(j\omega)$ lze v pásmu nižších frekvencí, kde $|ky(j\omega)|$ je dosti vysoké, určit na základě přibližného vztahu

$$A(j\omega) = 1 - \left| \frac{ky(j\omega)}{1 + ky(j\omega)} \right| \doteq \frac{1}{|ky(j\omega)|} \quad (8)$$

z příslušné amplitudové charakteristiky přenosu otevřené smyčky sumačního zesilovače. Odchylka A zesilovače s charakteristikami na obr. 2a a kteréhokoliv kvalitního zesilovače s nulováním nestoupne na příklad až do frekvence 100 Hz nad zanedbatelnou hodnotu 0,1%. S růstem frekvence však velikost odchylky rychle stoupá a v okolí mezní frekvence ω_{0s} nastává dokonce přechod mezi stavem, kdy $ky/(1 + ky) = 1$ a druhým stavem, kdy — pro $|ky(j\omega)| < 1$ — se $ky/(1 + ky)$ blíží hodnotě ky . To jinými slovy znamená, že v bodě mezní frekvence ω_{0s} , jednotková nízkofrekvenční asymptota amplitudové charakteristiky funkce $ky/(1 + ky)$ přechází ve vysokofrekvenční asymptotu charakteristiky funkce ky se sklonem -20 dB/dekádu, takže — vyjádřeno analyticky

$$\frac{ky(p)}{1 + ky(p)} \doteq \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_{0s}}} \quad (9)$$

Odpovídajícím způsobem by se měla upravit i základní idealizovaná rovnice (7): Výsledný vztah

$$u_0 = - \left(u_1 \frac{R_0}{R_1} + u_2 \frac{R_0}{R_2} + u_3 \frac{R_0}{R_3} + u_4 \frac{R_0}{R_4} \right) \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_{0s}}} \quad (10)$$

je přijatelně reálný obraz pochodu sumačního zesilovače pro mnohem širší pásmo frekvencí. Totéž platí pro všechna zapojení počítačového zesilovače, v nichž $Z_0 = R_0$ nebo kdy v Z_0 složeném z více prvků lze nalézt dráhu z bodu A k výstupu zesilovače, jež vede jen přes reálné odpory.

K chybám způsobeným odchylkami funkce $ky/(1 + ky)$ od jednotkové hodnoty je nutno ovšem přičíst vliv nepřesností poměru Z_0/Z_1 . U sumačního zesilovače lze chybu z této příčiny obyčejně zanedbat, neboť poměr dvou odporů — jsou-li vinuty z dobrého odporového materiálu a dobře stárnuté — se bez větších potíží udrží v toleranci několika setin procenta.

15.2.4. Přenos integračního zesilovače

Jak ukazuje graf na obr. 2b, klesá v případě integračního zesilovače amplituda přenosu otevřené smyčky nejen na vysokých frekvencích, ale i směrem k stejnosměrnému signálu. Je-li použito automatické kompenzace účinku driftu, dochází ovšem k dolnofrekvenčnímu odřezu přenosu na tak nepatrné frekvenci (pro uvažovaný integrační zesilovač v okolí $\omega_a \approx 10^{-7} \text{ s}^{-1}$), že se dokonce dříve uplatní časová konstanta použitého kondensátoru, třebaž dosahuje u kvalitních styroflexových kondensátorů vysoké hodnoty $T_0 \approx 5 \cdot 10^4 \text{ s}$. Přenos integračního zesilovače má proto — uvažováno přesněji — tvar

$$u_0 = -u_i \frac{1}{RCp} \frac{T_0 p}{1 + T_0 p} \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_a}} \quad (11)$$

Přislusným způsobem by se měly při přesné analýze upravit i přenosy všech aplikací počítačového zesilovače, v nichž dráha impedancí Z_0 z bodu A k výstupu zesilovače vede vždy přes nějaký kondensátor.

Pokud jde o přesnost časové konstanty RC , je nutno počítat s chybami několikrát většími než při reálném přenosu R_0/R . Nejlepší poměry jsou při použití odporů z Nichromu a styroflexových kondensátorů, neboť tepelný koeficient obou těchto materiálů má zhruba stejnou hodnotu — asi $1,5 \cdot 10^{-4}/^\circ\text{C}$ — a opačné znaménko. I v tom případě se nastavená hodnota udrží stěží v mezích $\pm 0,05\%$.

15.2.5. Počítací zesilovač konstruované ve VÚT

Z naznačené obecné analýsy funkce a přesností počítačového zesilovače, jejíž některé stránky jsou podrobněji rozvedeny v [2], plynou všechny potřebné směrnice pro řešení hlavních praktických otázek návrhu a konstrukce. Běží především o počet a druh zesilujících stupňů ve stáse elektronické větvi zesilovače a speciálně o obvody vstupního a koncového stupně ss větve, dále o realizaci požadovaného frekvenčního průběhu přenosů obou větví, o návrh kombinované počítací sítě, která by umožnila rychlé a přehledné určení funkce zesilovače v analogickém výpočtu, a konečně o požadavky na zdroje napájecích napětí. Tyto problémy mohly být v zesilovačích konstruovaných ve VÚT zvládnuty celkem úspěšně. Přispělo k tomu hlavní měrou použití kvalitních potenciometrů a vhodných vibračních relé.

Technika výroby přesných potenciometrů, vyvinutá ve VÚT, umožňuje navázat „kompensované“ potenciometry, jež mají dokonale lineární přenos i se zátěží jen několikrát větší než celkový odpor vinutí. Toho se docílí výrazně nelineárním průběhem vinutí podle zásad patrných z diagramu na obr. 3. S kompenzovanými potenciometry není těžko sestavit bez složitějšího systému přepínaných odporů velmi pružnou počítací síť o vysokém vstupním odporu, který přilíší nezatíží koncový stupeň zesilovače. Jednoduchý případ počítací sítě s kompenzovanými potenciometry je na obr. 4. Minimální vstupní odpor je větší než 80 kΩ, zesílení lze měnit od 0 do značně vysoké hodnoty a časovou konstantu integrace od 1 s výše. Síť není příliš náročná na stínění — oba pevné odpory nemusí mít obvyklou hodnotu mnoha megohmů — a zvláště výhodný je ovšem poměrně malý příkon potřebný k jejímu vybuzení. To usnadňuje konstrukci koncového stupně: Stačí běžné zapojení elektronky o malé anodové ztrátě a s malým odběrem z napájecích zdrojů.

Vibrační relé (konstruované rovněž ve VÚT) se uplatnilo úsporami v konstrukci obou zesilujících větví a zčásti i snížením požadavků na stabilizaci napájecích napětí. Hrají tu roli dvě stránky jeho konstrukce (fotografie na obr. 5), a to především vysoká mechanická rezonanční frekvence vibračního systému, jež umožňuje zvýšit modulační frekvenci, na příklad na 400 Hz, a dále možnost volby vhodného spínacího režimu. Vysoká modulační frekvence rozšiřuje pásmo účinku zesílení k_{Σ} , proti běžné modulaci frekvencí sítě téměř o řád — tedy do oblasti kolem 100 Hz — a přispívá tak k účinnějšímu využití zesílení st větve a tím i k snížení nároku na zesílení ss větve. Aby hodnotu k_{Σ} bylo možno volit bez nebezpečí nestability st větve potřebně vysokou, toho se dosáhne seřízením kontaktů relé na přepínání s vyloučením intervalu, kdy by vibrační kontakt nebyl ve styku s žádným z obou pevných kontaktů. Správným seřízením relé se zabrání napětí st větve zesílenému výstupnímu napětí proniknout přes relé do vstupu. To je velmi důležité: Bez oddělení výstupu od vstupu by bylo třeba do st větve zařadit lichý počet zesilovačích stupňů a to by vedlo kromě ne hospodárnosti k dalším komplikacím se získáním kladné polarizace přenosu k_{Σ} .

Snížené nároky na zesilující obvody se projevily úsporami v počtu elektronek, v rozměrech a odběru koncového stupně ss větve a v požadavcích na napájecí zdroje. Schemata dvou úspěšně řešených počítacích zesilovačů konstruovaných ve VÚT jsou na obr. 6 a 7. Co do vlastností se od sebe liší hlavně výkonovými možnostmi koncového stupně (při stejném rozsahu výstupního napětí $\pm 100 \text{ V}$ je minimální zátěž v prvním případě 40 kΩ, v druhém 10 kΩ) a hodnotami zesílení obou elektronických větví (v druhém případě jsou zesílení více než dvojnásobná, $k_{\Sigma} \approx 1000$, $k_{\Sigma} \approx 10\,000$). Zlepšených vlastností druhého z obou zesilovačů se dosáhlo zvětšením počtu elektronek — dva triodové systémy byly nahrazeny dvěma pentodami, takže místo dvou elektronek prvního zesilovače jsou použity tři elektronky — a přirozeně i zvýšením ss příkonu do koncového stupně.

Při detailním řešení elektronické části počítačového zesilovače nejde jen o otázky, týkající se úsporné realizace žádaných zesílení a potřebného výkonu, ale je nutno věnovat pozornost také konstrukci vstupních obvodů ss větve, které rozhodují o velikosti ss rušivého proudu i , a o driftu zesilovače. Pokusy s potlačení proudu i musí vycházet z experimentálního určení jeho zdrojů: Pokud se tu projevuje svod z bodu A blokového schématu k přívodům anodového napětí ve spodku první elektronky, pomůže důkladná úvala o umístění a izolaci všech vodičů bodu A a o udržení čistoty spodku elektronky. Větší úlohu hraje v i obyčejné podíl mřížkového proudu, ale i ten lze snížit volbou pracovního bodu elektronky teoreticky na nulu. To plyne ze závislosti mřížkového proudu triody 6CC41 — a kterékoliv jiné zesilující elektronky — na předpětí mřížky (obr. 8). Nastavení pracovního bodu se ovšem během provozu mění; hlavní příčinou změn je kolísání žhavičového napětí.

Oba zesilovače VÚT, o nichž byla řeč, udržují proud i v mezích $\pm 10^{-8}$ A. K dosažení potřebné stabilizace pracovního bodu vstupní elektronky, který byl volen s ohledem na malý mřížkový proud podle zásad odvozených z diagramu na obr. 8, bylo nutno použít dobře regulovaného zdroje žhavičového napětí: Nejvyšší povolená změna žhavičového napětí nepřesahuje 2%, ať ji způsobuje kolísání v síti či proměnný žhavičový odběr. Toleranci $|i| \leq 10^{-8}$ A není pravděpodobně možno s normálními elektronkami dále podstatně snížit.

Regulace žhavičového napětí první elektronky má příznivý účinek i na celkový přenos konstantního signálu, neboť chyby v nulování zesilovače — potlačené ovšem účinkem ss větve — způsobuje v podstatě drift vstupních obvodů ss větve. Kdyby byla na vstupu zesilovače jednoduchá trioda, bylo by třeba při změně žhavičového napětí o 10% počítat s driftem ekvivalentním přírůstkem rušivého napětí u , o 0,1 V. K podstatnému snížení driftu byl do vstupu zesilovačů vřazen místo jednoduché triody symetrický obvod, vhodný kromě toho i k sečtení napětí $u + u$, s napětím $u_{k,y}$. Tímto detailem konstrukce — doplněným regulací žhavení — je při dostatečné síle větve k,y , zaručena dlouhodobá stabilita nulování: Drift výstupního napětí obou zesilovačů VÚT v zapojení s jednotkovým přenosem nepřesahuje mez 1 mV.

A konečně několik slov o realizaci žádaného frekvenčního průběhu obou zesilujících větví. Potřebný pokles přenosu ss větve se provede pomocí jednoduchého dolnoprostupného členu RC vřazeného za demodulátor. Aby se současně zajistila i potřebná filtrace demodulovaného napětí, je nutno volit časovou konstantu RC tak, aby amplituda funkce $k,y(\omega)$ poklesla pod jednotkovou hodnotu již několik oktav před dosažením nosného kmitočtu modulace. Pokud jde o frekvenční průběh přenosu ss větve, je třeba počítat s kapacitami elektronek a žádaného průběhu dosáhnout úpravou vazebních sítí podle obr. 9.

15.2.6. Dynamické chyby při analogickém řešení složitějších lineárních úloh

V obr. 10 je blokové schéma modelu obecné lineární diferenciální rovnice n -tého řádu

$$-a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} - \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} - a_0 y(t) = x(t). \quad (12)$$

Aby k řešení stačil jeden sumační zesilovač a n integračních zesilovačů, byla znaménka koeficientů volena střídavě kladná a záporná, takže není obecně nutno provádět inverzi.

Určení celkové přesnosti modelu je už na první pohled velmi obtížné. Nejde ovšem o statické chyby — ty jsou nepatrné a není těžko je odhadnout — ale o chyby dynamické, k nimž dochází při řešení přechodné odezvy vlivem konečné šířky pásma použitých zesilovačů a působením svodového odporu kondenzátorů ve zpětnovazební síti integračních zesilovačů. Oba vlivy je možno — jak již bylo ukázáno — respektovat úpravou idealizovaných přenosů uvedených v tabulce 1, a to v případě sumačního zesilovače vztahem

$$-U_n(p) = -\left\{ \frac{1}{a_n} X(p) + \frac{a_{n-1}}{a_n} U_{n-1}(p) - \dots + \frac{a_1}{a_n} U_1(p) - \frac{a_0}{a_n} U_0(p) \right\} \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_s}}. \quad (13)$$

a v případě m -tého integračního zesilovače vztahem

$$U_{m-1}(p) = -\frac{1}{p} U_m(p) \frac{T_e p}{1 + T_e p} \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_i}}. \quad (14)$$

V rovnicích (13) a (14) značí T_e vybíjecí časovou konstantu styroflexových kondenzátorů, ω_s a ω_i mezními frekvencí sumačního a integračního zesilovače, U_{m-1} výstupní napětí m -tého integrátoru.

Model sestavený z reálných počítačích zesilovačů neřeší danou rovnici (12), ale — jak lze odvodit dosazením výrazů z rovnic (13) a (14) do blokového schématu na obr. 10 — odlišnou rovnici operátorového tvaru

$$Y(p) \left\{ -a_n [f(p)]^n + a_{n-1} [f(p)]^{n-1} - \dots - a_0 - a_n [f(p)]^n \frac{p}{\omega_s} \right\} = X(p). \quad (15)$$

Rozdíl mezi oběma rovnicemi je v tom, že v rovnici (15) nahrazuje proměnnou p funkce $f(p)$

$$f(p) = \frac{(1 + T_e p) \left(1 + \frac{p}{\omega_i} \right)}{T_e}. \quad (16)$$

a že tu je navíc člen $-a_n p[f(p)]^{n-1}/\omega_s$.

K stanovení přesnosti analogického výpočtu je theoreticky třeba řešit danou rovnici a výsledek řešení srovnat s odezvou modelu, definovanou rovnicí (15). Tato úloha je však i v poměrně jednoduchých případech těžko zvládnutelná. Snaží se hrubý — nebo jen kvalitativní — odhad přesností, plynoucí z frekvenčního pohledu na model.

Otevřená smyčka reálného modelu na obr. 10 má přenos

$$G(p) = \frac{a_0}{-a_n[f(p)]^n + a_{n-1}[f(p)]^{n-1} + \dots + a_1[f(p)] - a_0 \frac{p}{\omega_s}} \quad (17)$$

S použitím funkce $G(p)$ není těžko upravit celkový přenos modelu — čili přenos jeho uzavřené smyčky — na tvar vhodný pro frekvenční řešení

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{a_0} \frac{G(p)}{1 - G(p)} \quad (18)$$

Výraz $Y(p)/X(p)$ otvírá hledané jednoduché kvalitativní hledisko na přesnost modelu: Jde-li o úlohu s odezvou oscilačního charakteru, znamená to, že fáze $LG(j\omega)$ frekvenční charakteristiky funkce $G(p)$ je v bodě mezní frekvence ω_0 téměř nulová a $1 - G(j\omega_0) \approx 0$, aby celková frekvenční odezva modelu dosáhla v okolí ω_0 potřebné rezonanční špičky. Za těchto okolností se ovšem malé odchylky v přenosu otevřené smyčky modelu projeví mnohem výrazněji než v případech, kdy $|1 - G(j\omega_0)| \approx 2$ a přechodná odezva je dostatečně tlumena. Je-li na příklad $|1 - G(j\omega_0)| \approx 0,1$, pak nepatrný posuv fáze $LG(j\omega_0)$ z -356° na -357° — způsobený třeba tím, že pásmo pěti integračních zesilovačů modelu není neomezené, ale sahá ke konečné, i když poměrně vysoké frekvenci $300\omega_0$ — vyvolá patnáctiprocentní pokles rezonanční špičky (z 10 na 8,5). Stejně nepatrný posuv fáze o 1° změní naproti tomu při $|1 - G(j\omega_0)| \approx 0,8$ rezonanční špičku desetkrát méně. Podobný je v obou případech i charakter změn přechodné odezvy na skok $x(t)$. Vztah mezi přechodnou a frekvenční odezvou je ostatně dobře znám z teorie frekvenčního řešení servomechanismů.

K bližší ilustraci možnosti analogického výpočtu postačí stručná analýza reálného modelu jednoduché diferenciální rovnice druhého řádu

$$\frac{d^2y}{dt^2} + A \frac{dy}{dt} + By = Bx, \quad (19)$$

jakou je na příklad definován servomechanismus s viskózním tlumením (v tom případě $A = 1/\tau_m$, $B = k/\tau_m$, τ_m je časová konstanta servomotoru, k konstanta rychlostní chyby). Model (obr. 11) řeší ve skutečnosti odlišnou rovnici

$$Y(p) \left\{ \left[\frac{(1 + T_c p)(1 + \frac{p}{\omega_s})}{T_c} \right] \left(1 + \frac{p}{\omega_s} \right) + A \left[\frac{(1 + T_c p)(1 + \frac{p}{\omega_s})}{T_c} \right] + B \right\} = Bx. \quad (20)$$

Vliv konečné šířky pásma invertoru byl pro jednoduchost zanedbán.

Zajímavé jsou dva případy rovnice (19). Jde předně o rovnici harmonického pohybu

$$\frac{d^2y}{dt^2} + By = Bx, \quad (21)$$

kteřá popisuje idealizovaný netlumený servomechanismus ($A = 0$, $\tau_m = \infty$) se sinusovou odezvou

$$y(t) = 1 - \cos \sqrt{B} t \quad (22)$$

na skokovou změnu x v čase $t = 0$. Skutečná odezva má, jak lze odvodit z rovnice (20), tvar sinusovky s exponenciálně stoupající či klesající amplitudou

$$y(t) = 1 - e^{-\left[\frac{1}{\omega_s} + \frac{1}{2\omega_s}\right]t} \cos \sqrt{B} t. \quad (23)$$

Jestliže $B = 100$, $T_c = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ a $\omega_s = 10^5 \text{ s}^{-1}$, pak $y = e^{+0,00025t} \cdot \sin 10t$ a amplituda sinusovky stoupne za 8 s (t. j. po deseti vlnkách) téměř o 1%. Na tento typ odchylky skutečné odezvy od theoretického tvaru netlumené sinusovky ukazuje i posuv fáze frekvenční charakteristiky otevřené smyčky modelu vyvolaný nepřesností analogii integrace, sumace a inverse. Jak plyne z amplitudové charakteristiky přenosu otevřené smyčky modelu

$$G(p) = \frac{BT_c^2}{\left(1 + T_c p\right) \left(1 + \frac{p}{\omega_s}\right) \left(1 + \frac{p}{\omega_s}\right)} \quad (24)$$

v obr. 12a, dochází na frekvenci ω_0 k posuvu fáze dozadu přibližně o přírůstkový úhel

$$\Delta \varphi(j\omega_0) \approx \left(2 \frac{1}{T_c \sqrt{B}} - \frac{\sqrt{B}}{\omega_s} - 2 \frac{\sqrt{B}}{\omega_s} \right) \frac{360^\circ}{2\pi} \approx -0,01^\circ \quad (25)$$

a amplitudová charakteristika neprochází kritickým bodem, jak by tomu mělo být s dokonalým modelem, ale oblasti exponenciálně rostoucích oscilací.

K mnohem příznivější situaci dochází při modelování dobře tlumeného servomechanismu s $\tau_m = 0,1 \text{ s}$, $k = 10 \text{ s}^{-1}$, $A = 10 \text{ s}^{-1}$, $B = 100 \text{ s}^{-2}$ a s přenosem otevřené smyčky

$$G(p) = \frac{BT_c^2}{\left(1 + T_c p\right) \left(1 + \frac{p}{\omega_s}\right) \left[AT_c + \left(1 + T_c p\right) \left(1 + \frac{p}{\omega_s}\right) \left(1 + \frac{p}{\omega_s}\right) \right]} \quad (26)$$

Theoretická odezva na jednotkový skok vstupu v čase $t = 0$

$$y(t) = 1 - e^{-8t} (\cos 8,65t - 0,115 \sin 8,65t) \quad (27)$$

se liší od odezvy reálného modelu s týmiž hodnotami T_1, ω_1, ω_2 jako v předcházejícím případě jen nepatrně. O tom svědčí zanedbatelný účinek parasitních konstant modelu na přesnost uzavírací smyčky. Nežádoucí změna fáze frekvenční charakteristiky otevřené smyčky modelu z -135 na $-135,01^\circ$ zvýší resonanční špičku odezvy uzavírací smyčky o méně než $0,1\%$. Stejně zanedbatelná je přitom i změna přechodné odezvy: Se stoupnutím resonanční špičky poklesne tlumení servomechanismu asi o $0,05\%$, a skutečná přechodná odezva má následkem toho tvar, který nelze od rovnice (27) žádným způsobem odlišit.

Ze zjednodušeného rozboru nepřesností analogického výpočtu plynou důležité poznatky i o rychlosti a jakou lze řešení provádět. Rychlost řešení dosažitelná s počítačem rozhoduje o volbě časového měřítka, kterým je možnou dobu trvání výpočtu buď prodloužit nebo zkrátit. Je-li doba potřebná k výpočtu dosti krátká — a to je, jak je zřejmé z provedené analýzy, v případech velké šířky pásma zesilovačů a malých nároků na přesnost — je možno řešení opakovat a výsledek zobrazit na oscilografu s opakovací časovou základnou synchronizovanou s chodem počítače.

K ujasnění problematiky periodisace řešení je možno vyjít z informací o analyzovaném modelu diferenciálních rovnic 2. řádu. Periodické řešení rovnice se silně oscilujícími výsledkem je na modelu, o němž byla řeč, stěží možné, nejvýše by se dalo uvažovat o jednom řešení za několik vteřin. Naproti tomu případy s dobře thumenými odezvami by bylo možno řešit i několikrát za vteřinu, neboť i při desetinnásobném zvýšení frekvence záknitů by se amplituda první špičky přechodné odezvy nezvýšila o více než 1% . I tak by se ovšem nemohlo sáhnout k opakovací frekvenci 50 Hz, jež je u repetitivních počítačů běžná, neboť doba použitelná k řešení by nutně zvýšila frekvenci záknitů nejméně na 500 Hz. Dosažený výsledek je přesto příznivý: Model byl sestaven ze zesilovačů konstruovaných pro jednorázový chod a možnost opakovat řešení třebas jen jednou za vteřinu bude v některých případech velmi vítána.

15.3. Nelineární úlohy

Mnohem větší potíže než s lineárními vztahy jsou při analogickém výpočtu obvykle s realizací nelineárních operací. Jde o násobení a podíl proměnných, o výrobu funkčních průběhů a o další vztahy, při nichž poměr výstupu ke vstupu závisí na amplitudě vstupních veličin nebo je ovlivňován proměnnými parametry úlohy. Tyto nelineární operace se v elektronických analogických počítačích řeší různými způsoby, ale žádná ze známých metod se zdaleka neblíží dokonalosti lineárních analogií. To je pochopitelné. Všechny elementární lineární závislosti lze realizovat pomocí vysoce stabilních a frekvenčně téměř nezávislých jednoduchých pasivních elektrických prvků — odporů a kondenzátorů. K získání složitějšího lineárního vztahu stačí potřebnou kombinací pasivních prvků doplnit zesilující elektronickou částí, která obstará i nutný převod napětí na proud, aniž by přenos pasivních prvků znatelně ovlivnila. K realizaci elementárních nelineárních operací je naproti tomu nutno použít prvků, které buď nejsou stabilní (na příklad elektronky) nebo jsou silně frekvenčně závislé (toho druhu jsou všechny prvky elektromechanické, jako počítací potenciometry, motory a pod.).

15.3.1. Modelování nelineárních operací založené na diodové charakteristice

Nejpřesnější a nejstabilnější elektronický elementem nelineárních analogií je vakuová dioda s výrazně nelineárním průběhem závislosti proudu na napětí. Základní zapojení diody, které této nelinearity využívá, je na obr. 13. Na dalším obrázku 14 je ukázáno, jaké různé průběhy umožní volba polarity, vstupního napětí, konstantního zes. napětí U_1 a směru propustnosti diody.

K získání analogií složitějšího tvaru nelineárních funkcí stačí použít vhodné kombinace základních diodových obvodů. Postupuje se tak, že se žádaný funkční průběh aproximuje řadou lineárních úseků, pro každý z těchto úseků se navrhne příslušný elementární diodový nelineární obvod, na vstupy všech diodových obvodů se zavede vstupní signál dané úlohy a jejich výstupní napětí se sečtou pomocí počítačového zesilovače v sumačním zapojení. K ilustraci této metody je na obr. 15 ukázáno schema analogie jednoduché nelineární úlohy

$$y = \begin{cases} k_1 x + k_1 B & \text{pro } x < -B, \\ 0 & \text{pro } -B < x < A, \\ -k_2 x - k_2 A & \text{pro } x > A, \end{cases} \quad (28)$$

při níž jde v podstatě o modelování oblasti necitlivosti. Řada schemat analogií jiných nelineárních operací tohoto druhu je uvedena v [3]. Další složitější nelineární průběhy — na příklad kvadrát vstupního napětí, úseky goniometrických funkcí a pod. — lze nastavit na diodovém generátoru funkcí odvozeném stejnou metodou. Schema generátoru, který aproximuje nelineární průběhy čtrnácti lineárními úseky s nastavitelnými mezemi a stoupáním, je uvedeno v [1]. Počet lineárních úseků tohoto generátoru je pro většinu funkcí více než postačující. Větší chyby než aproximace funkcí pomocí konečného počtu lineárních úseků způsobuje obvykle nejistá hodnota přepínacího potenciálu diody (chyba z této příčiny může činit i několik desetin voltu) a nemulový a nestabilní odpor diody v propustném směru (jeho změny činí stovky ohmů). Chyby způsobené oběma těmito vlivy jsou sice ve srovnání s odpovídajícími nepřesnostmi analogií lineárních operací vysoké — drift počítačového zesilovače s nulovým nepsaluje 1 mV a nestabilita poměrů impedancí Z_0 a Z_1 je značně menší než $0,1\%$ při libovolné hodnotě Z_0 a Z_1 — ale širokopásmovou generaci nelineárních průběhů nelze pravděpodobně provést jiným způsobem přesněji.

Pomocí diodového generátoru nelineárních funkcí je možno realizovat řadu nelineárních operací. Na použití generátoru kvadratických přenosů je na příklad založena násobička dvou proměnných veličin, x a y , vycházející ze vztahu

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - (x-y)^2. \quad (20)$$

O této násobičce bude řeč v [3].

Nepřesnostmi typickými pro diodové nelineární analogie trpí pochopitelně také všechny analogie využívající nelineární charakteristiky zesilujících elektronek — na příklad exponenciální nůžkovou charakteristiku — a to je ještě nejčastěji nutno počítat s množinou většími chybami. Výhodou všech elektronických analogů je ovšem také přímo přenosu a poměrně neudrobná konstrukce, což v určitých případech — a téměř vždy při řešení regulačních úloh — nedostatků elektronických nelinearit více než vyváží.

V jiných místech analogického výpočtu se naopak vystačí s úzkým pásmem několika málo cyklů, ale zato se požaduje, aby řešení bylo co nejpřesnější. V těch případech je nutno sáhnout po elektronomechanickém nelineárním prvku — přesném počítacím potenciometru. Každý potenciometr může být nelineární dvěma způsoby: Lineární není především závislost mezi oběma jeho elektrickými veličinami — napětím přiklopeným na potenciometr a napětím mezi běžcem a jedním koncem vinutí — neboť ji lze ovlivnit polohou běžce. A kromě toho může být samo vinutí potenciometru nelineární a tím i vztah mezi napětím a polohou běžce.

15.3.2. Tyčové a šroubovicové potenciometry VÚT

Počítací potenciometry jsou pro každý přesný analogický počítač prakticky stejně důležité jako elektronické části počítačích zesilovačů. Rozdíl je v tom, že k sestavení zesilovačů stačí běžné radiové součásti (potřebu kvalitního vibračního relé je možno v krajním případě obejít), zatím co přesné počítací potenciometry s příslušným vinutím jsou velmi drahé a někdy dokonce nedostupné. Otázka potenciometrů se proto nedá jednoduše přejít. Každé vážnější úvaze o stavbě počítače musí předcházet vyřešení problému — z jakého zdroje bude možno potřebné potenciometry čerpat.

Ve VÚT bylo rozhodnuto pokusit se o zvládnutí technologie potenciometrů vlastními prostředky, třebaš bylo jasné, že to bude stát značnou část výzkumné a vývojové kapacity, jež byla počítačům věnována. Pro toto rozhodnutí mluvily i nepříliš příznivé informace o nejlepších zahraničních potenciometrech. Žádné z potenciometrů, jež jsou v zahraničí na trhu, totiž nemají současně — pokud lze zjistit — všechny žádané vlastnosti — vysokou přesnost daného průběhu i celkového odporu, široký sortiment nelineárních průběhů, počítaje v to i nemonotonní goniometrické průběhy, malé rozměry, nepatrné nároky na hnačí moment, levnou automatizovanou výrobu.

Práce na potenciometrech byly rozděleny do dvou etap: Cílem první etapy bylo dosáhnout jakosti nejlepších zahraničních potenciometrů kruhových (na příklad potenciometrů vyvinutých spoluprací amerických firem Bell Telephone Laboratories a Western Electric Company) a při výrobě současně uplatnit moderní automatizační metody alespoň natolik, kolik jich je vloženo do procesu výroby zahraničních šroubovicových potenciometrů. Do jaké míry se to podařilo, ukazuje výsledek prací první etapy, tyčový potenciometr VÚT, vyráběný nyní v n. p. Elektrosignál. Hlavní údaje o tyčovém potenciometru (podrobnější informace jsou v referátu podaném na IV. konferenci o strojířích na zpracování informací [4]): Vinutí tyčového potenciometru je přesně lineární — žádaný funkční průběh zajišťuje spirálová drážka, která převádí vstupní otočný pohyb hřídele na podélný posuv běžce. Výroba funkční drážky i navíjecí proces jsou úplně automatizovány. Požadovaný průběh výstupního napětí je u potenciometru délky 0,5 m dodržen s přesností 0,05% a téměř stejná je také tolerance celkového odporu. Po všech těchto stránkách může tyčový potenciometr soutěžit s nejlepšími zahraničními výrobky. Je však podstatně větší než zahraniční spirálové potenciometry, potřebuje větší moment k posuvu běžce a je horší i po některých dalších stránkách praktického použití.

Proto bylo přikročeno k druhé etapě prací se snahou vyrovnat se i s těmito nedostatky. Výsledek vývoje není ještě skončen, ale všechny hlavní problémy se již podařilo vyřešit. Z tyčového potenciometru zůstal princip použitých metod automatizace navíjecího procesu a myšlenka realizace nemonotonních funkcí pomocí mechanického přepínacího zařízení. Hlavní rozdíl je v přechodu na šroubovou odporovou dráhu, která umožňuje zmenšit rozměry a zlepšit resoluci, a v způsobu transformace lineárního vstupu — otočného pohybu hřídele — na funkční elektrický výstup, která je u nového spirálového potenciometru VÚT provedena proměnným stoupáním Kohlrauschova odporového vinutí. Navíjecí proces je automatizován pomocí kopírovacího systému založeného na principu Wheatstonova můstku, který je plynule vyrovnáván servomechanismem. Šroubovicové potenciometry VÚT — lineární i nelineární — a to včetně náročného průběhu silně zatížených goniometrických funkcí — mají stejnou přesnost jako tyčové potenciometry, asi čtyřikrát lepší resoluci (na dvoumetrové dráze lineárního dvacetistádkového potenciometru střední velikosti 40 × 100 mm o odporu 100 kΩ je na příklad asi 25000 závitů odporového drátu o průměru 0,05 mm), nízký hnačí moment (kolem 30 gcm) a malé vnější rozměry. Tyto příznivé údaje doplňuje vhodně i úspěch celkové koncepce mechanického provedení řešené s použitím moderní zálevačí techniky.

Fotografie tyčových a šroubovicových potenciometrů VÚT jsou na obr. 16 a 17.

15.33. Řešení nelineárních úloh pomocí počítačích servomechanismů

Analógické řešení elementárních nelineárních úloh, založené na nelineárních vlastnostech potenciometrů, vychází zásadně ze stejné zpětnovazební metody, jaká je použita v elektronických analogích lineárních vztahů. Zásadní rozdíl proti počítačím zesilovačům je v tom, že je nutno operovat nejen s elektrickým, ale i s mechanickým vyjádřením proměnných, neboť jedním z parametrů, které se při řešení nelineární úlohy plynule mění, je posuv či natočení běžce potenciometru. K realizaci příslušné transformace elektrické veličiny na mechanickou, je třeba elektronikou zesilující část zpětnovazební analogické systému doplnit servomotorem a tak počítač zesilovač změnit — podle známé definice servomechanismu [5] — v počítač servomechanismu.

Funkce počítač servomechanismu je patrná z blokového schématu na obr. 18. Jde o analogii jednoduché nelineární implicitní úlohy

$$f_a(y) = x \quad (30)$$

s nezávisle proměnnou x a závisle proměnnou y . Obdobla s počítačem zesilovačem je zřejmá. Úlohu zpětnovazební pasivní elektrické sítě, v níž se v případě počítač zesilovače odčítá vhodná lineární funkce výstupního signálu od lineární funkce vstupního signálu, vykonává v nelineární analogii čárkovaně ohraničená síť s funkcím potenciometrem P_1 , umožňujícím provedení žádané nelineární transformace mechanického výstupního signálu q_y na elektrické napětí u , úměrné funkci $f_a(y)$. Rozdílové napětí se v obou případech převádí pomocí silně zesilující části systému na výstupní signál. Výstupním signálem zesilující části S počítač servomechanismu je poloha běžce potenciometru a proto — jak už o tom byla řeč — je do výstupu bloku S vázán servomotor. Bod A' blokového schématu nelineární analogie je jako bod A počítač zesilovače (obr. 1) virtuálně uzemněn. Druhý — lineární — potenciometr P_2 , který se analogického řešení úlohy definované rovnici (30) přímo neúčastní, vykonává pomocnou funkci. Slouží k převodu výstupního natočení q_y na úměrné elektrické napětí u_x , aby výstup řešení měl stejnou elektrickou formu jako vstup.

Jak je zapojena analogie nejtypičtější nelineární úlohy — součinu funkcí časn x a y

$$z(t) = x(t) y(t) \quad (31)$$

to ukazuje schéma na obr. 19. V analogickém obvodu jsou dva servomechanismy, ale jeden z nich ($S1$) do zpětnovazební řešení vstupuje jen nepřímo: Je použit k převodu vstupního elektrického signálu $u_x = k_x x$ na úměrné natočení hřídele lineárního potenciometru P_2 , který je částí zpětnovazební sítě vlastního počítač servomechanismu analogie. Potenciometr P_2 má tak dva proměnné vstupy odpovídající vstupním veličinám x a y dané nelineární úlohou a napětí jeho běžce je proto úměrné součinu xy . Nelineární transformace se tentokrát provádí, jak vidět, ve vstupní části zpětnovazební sítě počítač servomechanismu.

Další typy nelineárních úloh lze odvodit z obou základních analogií. Na příklad podíl dvou proměnných

$$z(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \quad (32)$$

se řeší jako násobení, ale potenciometr P_2 je vinutí nelineárně, aby u_x bylo úměrné funkci $1/x$.

Všechny nelineární analogie — a to je opět obdoba s počítačím zesilovačem — se vzájemně liší jen zapojením zpětnovazební větve. Zesilující část počítač servomechanismu je možno proto konstruovat pro modely všech nelineárních úloh jednotnou, neličíc ovšem na nutné jednoduché úpravy stabilizačního obvodu podle charakteru úlohy a na potřebu nastavovat hodnotu zesílení. Konstrukce ovšem vychází ze stejných zásad, jaké plynou ze zpětnovazební analýzy počítač zesilovače, ale situace ztěžují potíže se zpožděním servomotoru a řadou mechanických nelinearit, které při synthese čistě elektronických obvodů odpadají.

Stručně o tom, jakými cestami probíhaly práce na počítačích servomechanismech ve VÚT.*)

*) Podrobnější pojednání je v [6].

V první etapě vývoje se dospělo ke klasičtému střídavému přístrojovému servomechanismu s miniaturním dvofázovým asynchronním servomotorem, s elektronickým zesilovačem napětí $Z1$ a výkonnou $Z2$ a s modulací ss chybového napětí pomocí vibračního relé R (obr. 20). K stabilizaci bylo použito počítač zesilovače s úměrným plus derivačním přenosem (tabulka I, řádek 19)

$$u_0 = -(u_1 + u) k_1 \frac{1 + \tau_a p}{1 + \tau_b p}, \quad (32)$$

aby přenos otevřené smyčky servomechanismu

$$ky(p) = k \frac{1}{p(1 + \tau_m p)} \frac{1 + \tau_a(p)}{1 + \tau_b(p)} \quad (33)$$

měl amplitudovou charakteristiku tvaru grafu na obr. 21. Graf ukazuje, jak se dosahovalo žádané šířky pásma přenosu: Pásma je v podstatě určeno hodnotou časové konstanty servomotoru τ_m a zesílením — konstantou rychlostní chyby — k . Je-li k pevně stanovena požadavky na přesnost, je nastavení pásma třeba provést nastavením konstanty τ_m pomocí setrvačnicku S potřebné velikosti na hřídeli motoru. Minimální šířka pásma je přirozeně určena setrvačností motoru bez setrvačnicku.

Servomechanismy tohoto druhu pracovaly celkem spolehlivě. Určité potíže byly jen s realizací velmi úzkého pásma přenosu pomocí nepříjemně velkého setrvačnicku a nevyhovovaly také velké rozměry a náročnost výkonové části elektronického zesilovače a příslušného napájecího zdroje. Obě potíže měla vyřešit druhá etapa prací.

Při zmenšování rozměrů počítačích servomechanismů byly vyzkoušeny nové typy pohonů s méně náročným zesilovačem, jež se proto záležely na první polovině silnější. Postupně byly prozkoumány teoretické i praktické otázky návrhu a konstrukce přístrojových pohonů s magnetickými spojkami úměrnými i spínacího typu, se ss motorky řízenými thyristrony či magnetickými zesilovací v kotvě a ss motorky řízenými elektronikou v magnetech. Dvoufázový asynchronní motor přístrojové velikosti se však nepodařilo nahradit ani vlastnostmi ani rozměry. Úsporu místa bylo nutno hledat jen v konstrukci výkonové části servozesilovače. Nejuspokojivější výsledek přineslo zatím použití nového obousměrného obvodu magnetického zesilovače s pulsyklovou odevzou, který tvoří s dvoufázovým st motorem velmi výhodnou kombinaci. Konečné řešení, ke kterému bude možno sáhnout až za několik let, přesto s magnetickými zesilovací nepočítá, a spoléhá na silný vývoj výkonových transistorů.

Problém nastavení pásma přenosu byl vyřešen vyvinutím dvou kvalitních rychlostních servomechanismů s vysokou ss hodnotou přenosu otevřené smyčky. U prvního z obou systémů, do jehož obvodu byl za st motor vázán mechanický integrátor s kotoučem a kuličkou, dosahuje přenos dokonce nekonečné hodnoty, u druhého, v jehož smyčce je jen motor, hodnoty asi 60 dB. To znamená, že v obou případech je pro řízení polohy k dispozici dokonalejší integrátor, a šířku pásma počítačích polohových servomechanismů je možno nastavit na libovolně malou hodnotu vhodnou volbou konstant stabilizačního filtru s úměrným plus integrálním přenosem. Charakteristika otevřeného obvodu počítačích servomechanismů má ovšem stejný tvar jako na obr. 21, ale úlohu konstanty τ_m určující šíři pásma, přebírá hlavní časová konstanta stabilizátoru.

To byl směr, kterým postupovaly práce na systémech servomechanismů. S nimi se souběžně řešila řada problémů elektrické i mechanické konstrukce, protože bylo nutno opatřit servomechanismy potřebnými elementy. Stručně o výsledcích: Kromě vibračního relé, o němž byla řeč již v souvislosti s počítacími zesilovači, byly vyvinuty přístrojové st servomotorky pro 50 i 500 Hz s vysokým poměrem záběrného momentu a momentu setrvačnosti (čtyřpólový motorek 500 Hz/1,5 W má maximální záběrný moment 40 gcm, moment setrvačnosti 1 gcm² a $M_d/J = 40000 \text{ s}^{-2}$) a tedy s minimální časovou konstantou τ_m (teoretická časová konstanta, odpovídající uvedené hodnotě M_d/J a synchronním otáčkám 15000 ot/min, činí asi 0,04 s) (obr. 22). Z mechanických elementů běží o dvě provedení integrátorů s kotoučem a kuličkou a o nejpružnější pohybové mechanismy, počínaje převodovými skříňkami servomotoru a konče několika typy spojek. Servomechanismy bylo třeba dále opatřit servo zesilovači s elektrickými a magnetickými zesilujícími stupni různého výkonu a zesílení.

15.4. Vstupní a výstupní jednotky

Při každém analogickém řešení je třeba do počítačích sítě dané úlohy zavést vhodnou časovou značku jedné či většího počtu nezávisle proměnných a za znamenat průběh odevzy všech závisle proměnných, které jsou pro řešení důležité. Do modelu typického polohového servomechanismu se na příklad obyčejně zavádí skoková značka — nebo skok rychlosti či zrychlení — napětí, představující vstupní úhel servomechanismu a zaznamenává se příslušná časová odevza napětí odpovídajícího výstupního úhlu. V tomto případě — a podobně tomu je i při modelování řady dalších regulačních úloh — stačí vstupní jednotku vybavit spínačem a potřebným počtem integračních zesilovačů a výstup zapnout pomocí vhodného (na příklad několikasmýčkového) oscilografu.

U mnoha úloh se s jednoduchými vstupy nevystačí. Často je výhodné zavést do některého vstupu šum — v tom případě je nutno vstupní jednotku doplnit použitím vhodného generátoru šumu — a někdy se místo jednoduchých normálních vstupů, jež je možno vyrobit lineární úpravou skokové změny napětí, žádá složitější časová funkce vstupního signálu. Tady se obvykle uplatní diodový generátor funkčních průběhů buzený lineárně rostoucím napětím z integračního zesilovače.

A nevystačí se mnohdy ani s oscilografickou výstupní jednotkou, neboť jednak oscilograf není nikdy natolik přesný, aby využil možnosti analogického výpočtu, a jednak je často třeba vynášet vzájemnou závislost dvou proměnných, z nichž ani jednou není čas. Lepší využití přesného analogického počítače umožní zapisovač XY — čili koordinátograf — s dvěma servomechanismy použitými k převodu ss napětí, odpovídajících dvěma proměnným veličinám úlohy na úměrný posuv ve dvou kolmých směrech odpovídajících proměnným pravouhlým souřadnicím zápisu. Má-li být jednou proměnnou čas t , musí jeden z obou polohových servomechanismů být schopen i funkce velmi přesného generátoru konstantní rychlosti. Kvalitní zapisovač je dále užitečně doplněn snímačem křivek. Jde o možnost zpětného převodu zápisu na přesně úměrné ss napětí vhodné k buzení počítače libovolnou časovou změnou vstupní veličiny (zapisovač koná v tom případě i funkci vstupní jednotky počítače). Na konstrukci zapisovače XY vyhovujícího snímačem křivek i možnostmi plynulého posuvu přesně definovanou konstantní rychlostí, což vše souhrnně představuje komplexní úkol velmi náročný jak po elektrické tak po mechanické stránce, se právě ve VÚT pracuje.

Mezi vstupy počítače je možno zahrnout i počáteční podmínky řešené úlohy. Jde o napětí, která musí být zavedena před začátkem řešení do všech integračních zesilovačů modelu, aby při spuštění výpočtu byla ve všech bodech počítačové sítě napětí přesně odpovídající stanoveným počátečním podmínkám. Zavedení vhodného napětí na výstup integračního zesilovače nečiní při jednotázovém řešení potíží. Je možno postupovat tak, že se zpětnovazební síť integrátoru přepne před započetím řešení do tvaru uvedeného v tabulce I na řádku 11 a do jejího vstupu se zavede napětí potřebné k získání žádaného u_0 , a při spuštění řešení se přepne do tvaru potřebného k realizaci integrace (řádek 3).

Uvažované vstupní i výstupní jednotky umožňují výpočtářské použití počítače. Při zapojení počítače do výrobního či měřicího procesu je často třeba zajistit dálkový přenos úhlu natočení hřídele, po případě přenos kterékoli jiné mechanické veličiny, již je možno převést na úhel. K tomu účelu byly ve VÚT vyvinuty přesně velmi rychlé širokopásmové vstupní servomechanismy se selsynovým indikátorem odchylky. Jejich technika vyšla z řešení počítačových servomechanismů [6].

15.5. Závěr

Přednáška o elektronických metodách analogického výpočtu měla dva cíle. Šlo v ní především o obecnou problematiku elektronických (a zčásti i elektromechanických) analogií a kromě toho měla stručně informovat o některých z výsledků, které byly na poli analogických počítačů dosaženy ve Výzkumném ústavu telekomunikací.

O analogických metodách byla řeč již na I. konferenci o automatizaci [8]. Proto bylo možno předpokládat znalost základních pravidel analogického výpočtu a soustředit pozornost především na ty stránky, které rozhodují o přesnosti nebo jsou důležité s hlediska praktického použití. Úvahy tohoto zaměření, jež byly do přednášky vřazeny, jsou z větší části původní. To se týká především statí o modelech lineárních úloh, tvořící jádro přednášky.

Informace o prvech analogií, vyvinutých ve VÚT, jsou doplněny v dalších přednáškách podrobnějším pojednáním o servomechanismech konstruovaných pro použití při analogickém výpočtu [6] a o sestavě počítačů [3, 7].

Literatura

- [1] Trudy vtorogo vsesojuznogo sověščennija po teorij avtomatičeskogo regulirovanija, Izd. AN SSSR, 1955.
- [2] B. MIREK, Stejnoseměrný zesilovač v analogických počítačích. Vydje ve Slabopr. obz.
- [3] J. ŠKARDA, Analýza a syntéza servomechanismů a nelinearitami na analogickém počítači. Uveřejněno v tomto sborníku.
- [4] J. PODZIMEK, Přesné tyčové potenciometry pro analogové počítačové stroje. Stroje na zpracování informací. Sborník IV. nakladatelství ČSAV, 1956.
- [5] G. S. BROWN, D. P. CAMPBELL, Principles of servomechanisms, J. Wiley & Sons, New York 1948.
- [6] Z. SLÁDEK, Servomechanismy použité v analogickém počítači. Uveřejněno v tomto sborníku.
- [7] Z. FÍKA, Celková koncepce analogického počítače VÚT. Uveřejněno v tomto sborníku.
- [8] Soubor prací o automatizaci. Nakladatelství ČSAV, 1955.

Obr. 1. Blokové schéma počítačů zesilovačů s automatickým měřením.

Obr. 2. Amplitudově charakteristický průběh otáčivé soustavy počítačů zesilovačů v sémantické zapojení (a) a v zapojení jako integrátor (b).

Obr. 3. Konecok propagační funkce počítačů zesilovačů s deskovými integrovanými vývody $U_{\text{des}} = k_{\text{des}} (p_{\text{des}} - p_{\text{des}0})$ pro $p_{\text{des}} = 0$ (a) a $p_{\text{des}} = 1$ s potencionálními rozdíly v napájecím napětí.

Obr. 4. Jednoduché obvodové zapojení počítačů zesilovačů.

Obr. 5. Vibrátor řetě VČT se servomotorem a běžným vibrátorem řet (a) a s miniaturizovaným elektronkou (b).

Obr. 6. Počítač zesilovačů se třemi diferenciálními traidami.

Obr. 7. Počítač zesilovačů s třemi traidami, které traidují v režimu definice pentodami.

Obr. 8. Závislost měřického proudu traidy na předpětí traidy při konstantním napájecím napětí.

Obr. 9. Obecný tvar vazební síť elektronky ve zesilovačích řet (a) a v jednodušším náhradním zapojení (b) frekvencí řet přenosu síť má přibližně tvar $g(p) = 1 + \frac{C_1 R_p}{C_2 R_p}$ jestliže $(R_p + R_d) > R_d + R_{\text{des}} + R_{\text{des}0} + R_{\text{des}1} + R_{\text{des}2} + R_{\text{des}3} + R_{\text{des}4} + R_{\text{des}5} + R_{\text{des}6} + R_{\text{des}7} + R_{\text{des}8} + R_{\text{des}9} + R_{\text{des}10} + R_{\text{des}11} + R_{\text{des}12} + R_{\text{des}13} + R_{\text{des}14} + R_{\text{des}15} + R_{\text{des}16} + R_{\text{des}17} + R_{\text{des}18} + R_{\text{des}19} + R_{\text{des}20} + R_{\text{des}21} + R_{\text{des}22} + R_{\text{des}23} + R_{\text{des}24} + R_{\text{des}25} + R_{\text{des}26} + R_{\text{des}27} + R_{\text{des}28} + R_{\text{des}29} + R_{\text{des}30} + R_{\text{des}31} + R_{\text{des}32} + R_{\text{des}33} + R_{\text{des}34} + R_{\text{des}35} + R_{\text{des}36} + R_{\text{des}37} + R_{\text{des}38} + R_{\text{des}39} + R_{\text{des}40} + R_{\text{des}41} + R_{\text{des}42} + R_{\text{des}43} + R_{\text{des}44} + R_{\text{des}45} + R_{\text{des}46} + R_{\text{des}47} + R_{\text{des}48} + R_{\text{des}49} + R_{\text{des}50} + R_{\text{des}51} + R_{\text{des}52} + R_{\text{des}53} + R_{\text{des}54} + R_{\text{des}55} + R_{\text{des}56} + R_{\text{des}57} + R_{\text{des}58} + R_{\text{des}59} + R_{\text{des}60} + R_{\text{des}61} + R_{\text{des}62} + R_{\text{des}63} + R_{\text{des}64} + R_{\text{des}65} + R_{\text{des}66} + R_{\text{des}67} + R_{\text{des}68} + R_{\text{des}69} + R_{\text{des}70} + R_{\text{des}71} + R_{\text{des}72} + R_{\text{des}73} + R_{\text{des}74} + R_{\text{des}75} + R_{\text{des}76} + R_{\text{des}77} + R_{\text{des}78} + R_{\text{des}79} + R_{\text{des}80} + R_{\text{des}81} + R_{\text{des}82} + R_{\text{des}83} + R_{\text{des}84} + R_{\text{des}85} + R_{\text{des}86} + R_{\text{des}87} + R_{\text{des}88} + R_{\text{des}89} + R_{\text{des}90} + R_{\text{des}91} + R_{\text{des}92} + R_{\text{des}93} + R_{\text{des}94} + R_{\text{des}95} + R_{\text{des}96} + R_{\text{des}97} + R_{\text{des}98} + R_{\text{des}99} + R_{\text{des}100} + R_{\text{des}101} + R_{\text{des}102} + R_{\text{des}103} + R_{\text{des}104} + R_{\text{des}105} + R_{\text{des}106} + R_{\text{des}107} + R_{\text{des}108} + R_{\text{des}109} + R_{\text{des}110} + R_{\text{des}111} + R_{\text{des}112} + R_{\text{des}113} + R_{\text{des}114} + R_{\text{des}115} + R_{\text{des}116} + R_{\text{des}117} + R_{\text{des}118} + R_{\text{des}119} + R_{\text{des}120} + R_{\text{des}121} + R_{\text{des}122} + R_{\text{des}123} + R_{\text{des}124} + R_{\text{des}125} + R_{\text{des}126} + R_{\text{des}127} + R_{\text{des}128} + R_{\text{des}129} + R_{\text{des}130} + R_{\text{des}131} + R_{\text{des}132} + R_{\text{des}133} + R_{\text{des}134} + R_{\text{des}135} + R_{\text{des}136} + R_{\text{des}137} + R_{\text{des}138} + R_{\text{des}139} + R_{\text{des}140} + R_{\text{des}141} + R_{\text{des}142} + R_{\text{des}143} + R_{\text{des}144} + R_{\text{des}145} + R_{\text{des}146} + R_{\text{des}147} + R_{\text{des}148} + R_{\text{des}149} + R_{\text{des}150} + R_{\text{des}151} + R_{\text{des}152} + R_{\text{des}153} + R_{\text{des}154} + R_{\text{des}155} + R_{\text{des}156} + R_{\text{des}157} + R_{\text{des}158} + R_{\text{des}159} + R_{\text{des}160} + R_{\text{des}161} + R_{\text{des}162} + R_{\text{des}163} + R_{\text{des}164} + R_{\text{des}165} + R_{\text{des}166} + R_{\text{des}167} + R_{\text{des}168} + R_{\text{des}169} + R_{\text{des}170} + R_{\text{des}171} + R_{\text{des}172} + R_{\text{des}173} + R_{\text{des}174} + R_{\text{des}175} + R_{\text{des}176} + R_{\text{des}177} + R_{\text{des}178} + R_{\text{des}179} + R_{\text{des}180} + R_{\text{des}181} + R_{\text{des}182} + R_{\text{des}183} + R_{\text{des}184} + R_{\text{des}185} + R_{\text{des}186} + R_{\text{des}187} + R_{\text{des}188} + R_{\text{des}189} + R_{\text{des}190} + R_{\text{des}191} + R_{\text{des}192} + R_{\text{des}193} + R_{\text{des}194} + R_{\text{des}195} + R_{\text{des}196} + R_{\text{des}197} + R_{\text{des}198} + R_{\text{des}199} + R_{\text{des}200} + R_{\text{des}201} + R_{\text{des}202} + R_{\text{des}203} + R_{\text{des}204} + R_{\text{des}205} + R_{\text{des}206} + R_{\text{des}207} + R_{\text{des}208} + R_{\text{des}209} + R_{\text{des}210} + R_{\text{des}211} + R_{\text{des}212} + R_{\text{des}213} + R_{\text{des}214} + R_{\text{des}215} + R_{\text{des}216} + R_{\text{des}217} + R_{\text{des}218} + R_{\text{des}219} + R_{\text{des}220} + R_{\text{des}221} + R_{\text{des}222} + R_{\text{des}223} + R_{\text{des}224} + R_{\text{des}225} + R_{\text{des}226} + R_{\text{des}227} + R_{\text{des}228} + R_{\text{des}229} + R_{\text{des}230} + R_{\text{des}231} + R_{\text{des}232} + R_{\text{des}233} + R_{\text{des}234} + R_{\text{des}235} + R_{\text{des}236} + R_{\text{des}237} + R_{\text{des}238} + R_{\text{des}239} + R_{\text{des}240} + R_{\text{des}241} + R_{\text{des}242} + R_{\text{des}243} + R_{\text{des}244} + R_{\text{des}245} + R_{\text{des}246} + R_{\text{des}247} + R_{\text{des}248} + R_{\text{des}249} + R_{\text{des}250} + R_{\text{des}251} + R_{\text{des}252} + R_{\text{des}253} + R_{\text{des}254} + R_{\text{des}255} + R_{\text{des}256} + R_{\text{des}257} + R_{\text{des}258} + R_{\text{des}259} + R_{\text{des}260} + R_{\text{des}261} + R_{\text{des}262} + R_{\text{des}263} + R_{\text{des}264} + R_{\text{des}265} + R_{\text{des}266} + R_{\text{des}267} + R_{\text{des}268} + R_{\text{des}269} + R_{\text{des}270} + R_{\text{des}271} + R_{\text{des}272} + R_{\text{des}273} + R_{\text{des}274} + R_{\text{des}275} + R_{\text{des}276} + R_{\text{des}277} + R_{\text{des}278} + R_{\text{des}279} + R_{\text{des}280} + R_{\text{des}281} + R_{\text{des}282} + R_{\text{des}283} + R_{\text{des}284} + R_{\text{des}285} + R_{\text{des}286} + R_{\text{des}287} + R_{\text{des}288} + R_{\text{des}289} + R_{\text{des}290} + R_{\text{des}291} + R_{\text{des}292} + R_{\text{des}293} + R_{\text{des}294} + R_{\text{des}295} + R_{\text{des}296} + R_{\text{des}297} + R_{\text{des}298} + R_{\text{des}299} + R_{\text{des}300} + R_{\text{des}301} + R_{\text{des}302} + R_{\text{des}303} + R_{\text{des}304} + R_{\text{des}305} + R_{\text{des}306} + R_{\text{des}307} + R_{\text{des}3$

121a

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{R_2}{R_1} u_1 \\ u_0 &= -\frac{1}{pCR} u_1 \\ u_0 &= -pCR u_1 \\ u_0 &= -\left(\frac{R_0}{R_1} u_1 + \frac{R_0}{R_2} u_2 + \dots \frac{R_0}{R_n} u_n \right) \\ u_0 &= -\frac{1}{p} \left(\frac{u_1}{R_1 C} + \frac{u_2}{R_2 C} + \dots + \frac{u_n}{R_n C} \right) \\ u_0 &= -\frac{1}{\alpha} u_i, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ u_0 &= -\alpha u_i \\ u_0 &= -\frac{1}{pR} u_i \\ u_0 &= -p \frac{RC}{\alpha} u_i \\ u_0 &= -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + pR_2 C} u_i \\ u_0 &= -\frac{R_2}{R_1} \frac{1 + pR_1 C}{p} u_i \\ u_0 &= -\frac{1 + pR_1 C}{pR_1 C} u_i \\ u_0 &= -\frac{pR_1 C}{1 + pR_1 C} u_i \\ u_0 &= -\frac{pR_1 C}{(1 + pR_1 C)(1 + pR_2 C)} u_i \\ u_0 &= -\frac{(1 + pR_1 C)(1 + pR_2 C)}{p^2 R_1 C^2} u_i \\ u_0 &= -\frac{C_1}{C_2} \frac{1 + pR_2 C_2}{1 + pR_1 C_1} u_i \\ u_0 &= -\frac{R_2}{R_1} \frac{1 + pR_1 C_2}{1 + pR_2 C_2} u_i \\ u_0 &= -\left(\frac{R_n}{\alpha R_1} u_1 + \frac{R_n}{\alpha R_2} u_2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_n + R_2}{\alpha R_n} u_n \right) p \left(\frac{R_0}{R_0 + R_n} + \frac{R_n + R_2}{pCR + 1} \right) C + 1 \end{aligned}$$